

微分幾何入門 (その 1)

村上

April 09, 2006 版 (最終改訂 April 24, 2006)

Contents

1	曲面の媒介変数表示と接空間	3
1.1	媒介変数表示あるいは局所座標	3
1.2	接ベクトルと接空間	3
1.3	座標基底と関数の微分	4
1.4	座標基底の変換則	5
1.5	ベクトル場	6
2	双対基底と余接空間	7
2.1	双対空間 (共役空間) と双対基底	7
2.2	座標基底の双対基底と余接空間	8
2.3	一次微分形式	9
3	計量あるいは第一基本量	10
3.1	計量ベクトル空間とその自己双対性	10
3.2	リーマン計量	11
3.3	曲線の長さとの第一基本形式	12
4	共変微分	13
4.1	クリストッフェル記号	13
4.2	測地線	14
4.3	共変微分	14
4.4	第二基本量と曲率	15
5	曲率テンソル	16
5.1	曲率テンソル	16
5.2	リッチテンソル・曲率スカラー	17
5.3	ガウスの基本定理	17
5.4	断面曲率	18
5.5	リッチ曲率・スカラー曲率	19
6	接続	21
6.1	テンソル積とテンソル空間	21
6.2	テンソル場	21
6.3	共変微分の分解	23
6.4	線型接続	23
6.5	捩率テンソルと曲率テンソル	25
6.6	平行移動	27
6.7	テンソル場の共変微分	29
6.8	リーマン計量と接続	32
6.9	ビアンキの恒等式	35
7	曲率と空間	37
7.1	平坦な空間	37
7.2	定曲率空間	38
7.3	アインシュタイン空間	39
7.4	ローレンツ多様体	40

はじめに

本稿は理系の学部生（数学専攻を除く）程度の数学の知識を前提にして、現代的な微分幾何の入門的事項を述べたものである。全体は大きく二部に分けられる。前半はいわゆる曲面論に相当する部分で、3次元ユークリッド空間内の2次元曲面を題材にして、現代的な微分幾何、特にリーマン幾何に出てくる幾つかの基礎概念（計量・共変微分・曲率テンソル等）を習得することを目指した。後半はいわゆる接続の理論の初等的な入門で、空間のつながり具合を記述する量として接続及び平行性の概念が、計量概念に依存することなく導入され、共変微分、曲率がやや一般的な立場から論じられる。この部分の入門的解説はあまり見ないと思う。以下各章の内容を簡単に述べておく。

第1章では、曲面上の曲線の（一階）微分を詳しく調べることで、曲面の接平面に対する媒介変数表示とでも云うべき接ベクトル空間の概念を導入する。これは曲面やその接平面を、外側の3次元空間という足場に立脚することなく捉えるための視座を提供するという点で重要である。その際、個々の媒介変数表示あるいは局所座標に応じて決まる座標基底と呼ばれる自然な基底ベクトルが接空間に導入される。これが以降の議論において中心的役割を果たすようになる。続く第2章では、線型空間の一般論に従って、接空間の共役空間としての余接空間を定義する。ここでの定義の仕方はいささか抽象的ではあるが、それが座標基底に対する双対基底としての dx, dy の役割を明確化する。またそれにより関数の全微分 df の数学的な意味合いが明確になる。ここでの議論はまた、ベクトルにおける反変と共変のルーツでもある。第3章では、3次元空間におけるベクトルの内積を曲面上に制限して考えることで、曲面の各点の接空間における内積、すなわち計量が定義されることをみる。計量の成分表示が曲面の古典論で第一基本量と呼ばれるものであるが、リーマン計量はその高次元への一般化である。第4章では曲面上の曲線の二階微分を考察し、それを曲面に接する成分と垂直な成分とに分解する事で、共変微分の概念及び曲面の第二基本量の定義を得る。その際、二階微分の座標基底への分解を具体的に与える係数として、リーマン計量から計算されるクリストッフェル記号（あるいはリーマン接続係数）が導入される。また第二基本量を用いた曲面の曲率（主曲率・平均曲率・ガウス曲率）の定義と計算方法を与える。第5章では共変微分を使ったリーマンの曲率テンソルの定義を与え、その幾何学的意味を考える。その過程で、曲面のガウス曲率の高次元での一般化である断面曲率及びそれから導かれるリッチ曲率、スカラー曲率等の概念を導入する。同時に、古典的曲面論の重要な結果であるガウスの基本定理を説明する。これは曲面のガウス曲率というものが実は曲面にとっての内在的量であることを主張するもので、ガウスをして驚愕の定理と言わしめたものであるが、逆に言えばこの事実が内在的幾何を追究するリーマン幾何を意味するものとしている。これはまた一般相対論の思想のも重要な役割を果たす。第6章は後半の主要部で、共変微分の意味を再考し、接続及び平行移動の概念を導入する。これらの概念は一般には計量とは独立に定義し得るものであるが、リーマン幾何での諸概念がその一般論の中でどう位置づけられるかについても簡単に触れる。また、共変微分を高階のテンソル場に拡張し、曲率テンソルの共変微分とそれが満たすビアンキの恒等式について述べる。これは最後の第7章において幾つかの代表的な空間の特徴付けを調べる際の道具として使われる。しかし、第7章の内容はむしろ第5章から直接的につながるもので、第6章をとばして直接第7章に進んでも理解にさほど影響は出ない。

本稿は微分幾何における諸概念に出来る限り初等的なイメージを与えることを目的として（なおかつそれが数学的にも嘘にならないように）書かれているが、一部に数学的抽象論の助けを借りた箇所がある。それは、第2章において双対空間（共役空間）を導入する部分、第3章で計量の一般的性質を概観する部分、及び第6章におけるテンソル空間の説明などである。しかしベクトル空間の概念については既に何処かで学んでいると思うので、それらの知識を抽象的な見地から整理しておくのも一興であろう。実際これらの概念を抽象論のレベルで一旦習得しておく、今度はそれが強力なツールとして様々な対象を理解する手助けをしてくれる事が実感でできる筈である。とはいえ、抽象論が好みでない向、あるいは理解しにくい場合には、それらの部分を読み飛ばして先に進むのも一つの手であると思う。本稿の記述は一部を除いて $n+1$ 次元ユークリッド空間内の n 次元超曲面の話、あるいは一般の n 次元リーマン多様体での話としても通用するように書かれている。とはいえ、本稿ではまだ多様体やベクトルバンドルの正式の定義も与えていないし、微分幾何の重要なツールである外微分形式についても全く説明していない。これらについては、いずれ本稿の続編としてまとめてゆく予定である。

1 曲面の媒介変数表示と接空間

1.1 媒介変数表示あるいは局所座標

3次元ユークリッド空間のデカルト座標を $(x^i)_{i=1,2,3}$ 、その座標軸に沿った単位ベクトルを e_i で表わすと、座標 (x^i) を持つ点の (座標原点に関する) 位置ベクトル r は

$$r = \sum_{i=1}^3 x^i e_i = x^i e_i$$

と表される。上式中央の \sum 記号で表された和は、しばしば最右辺のように略記される。すなわち上下に添字が現れる項でそれが同じ文字で表現されていれば、それはその添字について (添字がとり得る総ての値の範囲で) 和をとるものと約束する。これをアインシュタインの規約と云い本稿ではことわりなく使うが、慣れないうちは総和記号 \sum を省略せずに書く方が良いでしょう。ここで、二つの実数 u, v を変数とする三つの関数 $x^i = S^i(u, v)$ を用いて位置ベクトルが

$$r = S(u, v) = \sum_{i=1}^3 S^i(u, v) e_i$$

で表される点の集合 $S = \{S(u, v)\}$ を考えると、それは3次元ユークリッド空間内のある2次元曲面を表していると考えられる。曲面 S とは、数学的には二変数 u, v をパラメータとするある2次元空間 U から3次元ユークリッド空間への写像

$$S: U \ni (u, v) \mapsto S(u, v) = \sum_{i=1}^3 S^i(u, v) e_i \in \mathbf{R}^3$$

の事に他ならない。これを曲面 S の媒介変数表示あるいは $((u, v)$ を局所座標とする) 局所座標表示と云う。

1.2 接ベクトルと接空間

曲線とは実数直線のある部分集合 (区間 I) から3次元空間への写像であるが、特に曲面 S 上の曲線を表現するには

$$u = \varphi(t) \quad , \quad v = \psi(t)$$

なる二つの関数を用いて、一旦パラメータ空間 U を経由した写像

$$\Phi: I \ni t \mapsto S(u(t), v(t)) = \sum_{i=1}^3 S^i(\varphi(t), \psi(t)) e_i \in \mathbf{R}^3$$

を考えてやれば良い。 $t = t_0$ での φ, ψ の値を (u_0, v_0) とすると、曲線 $\Phi(t)$ は $t = t_0$ のとき曲面上の点 $P = S(u_0, v_0)$ を通る。 $\Phi(t)$ を $t = t_0$ において微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{t=t_0} &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{du}{dt}(t_0) \frac{\partial S^i}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{dv}{dt}(t_0) \frac{\partial S^i}{\partial v}(u_0, v_0) \right\} e_i \\ &= \frac{du}{dt}(t_0) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial S^i}{\partial u}(u_0, v_0) e_i + \frac{dv}{dt}(t_0) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial S^i}{\partial v}(u_0, v_0) e_i \end{aligned}$$

ここで $\sum (\partial S^i / \partial u) e_i = \partial S / \partial u$ 等とおくと

$$= \frac{du}{dt}(t_0) \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{dv}{dt}(t_0) \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0) \tag{1.1}$$

を得る。(上の式変形において、空間ベクトルをデカルト基底 e_i ではなく、 $\partial S / \partial u, \partial S / \partial v$ について整理したことは重要である。このちょっとした転換が以降の議論における一つの鍵となる。)

曲線の微分の幾何学的意味を考えれば、上式が点 P における曲線 Φ の接線の方向を表す (3次元) ベクトルになっている事は明らかであろう。そこでこのようなものを曲線 $\Phi(t)$ の $t = t_0$ (あるいは点 $P: (u_0, v_0)$) における接ベクトルと呼ぶことにする。(接ベクトルと書いた場合、それは常に接点 P を基準にして考えるものとし、その事はいちいちことわらない。) 曲面上の曲線の接線は常に曲面の接平面に含まれている事を考慮すると、このベクトルは曲面に接しているとも云える。つまり (1.1) 式で表されるものは曲線 Φ の接ベクトルであると同時に、曲面 S の接ベクトルにもなっているのである。

次に、ここで導入した $\partial S/\partial u = \sum(\partial S^i/\partial u)e^i, \partial S/\partial v = \sum(\partial S^i/\partial v)e^i$ という2つのベクトルについてもう少し詳しく調べよう。そのために、

$$\varphi(t) = t + u_0 \quad , \quad \psi(t) = v_0$$

とおいた特別の曲線 $\Phi_u(t)$ を考える。これは点 P の近傍に於いて v_0 を固定し u のみを動かした曲線に相当する(よってこれをしばしば座標曲線 u とも云う)。このとき $du/dt = \varphi'(t) = 1, dv/dt = \psi'(t) = 0$ である事に注意すると、(1.1)より

$$\left. \frac{d\Phi_u}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) \quad (1.2)$$

を得る。先程の定義に従えば、この式は $\partial S/\partial u$ が座標曲線 u (の微分) から得られる接ベクトルである事を示している。同様に

$$\varphi(t) = u_0 \quad , \quad \psi(t) = t + v_0$$

とおいて得られる特別の曲線 Φ_v (すなわち座標曲線 v) を考えると、 $du/dt = 0, dv/dt = 1$ なので

$$\left. \frac{d\Phi_v}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (1.3)$$

を得る。つまり $\partial S/\partial v$ は座標曲線 v の微分として得られる接ベクトルである。変数 u, v が S の媒介変数表示のパラメータとして機能する為の条件を考慮すると、これらは(3次元空間内のベクトルとして)一次独立である事に注意しておこう。こうして特別な2つの曲線 Φ_u, Φ_v から得られる特別なベクトル $\partial S/\partial u, \partial S/\partial v$ を用い、更に一般の曲線に対し $du/dt = \varphi'(t) = X, dv/dt = \psi'(t) = Y$ とおくと上の(1.1)式の右辺は

$$X \frac{\partial S}{\partial u}(u_0, v_0) + Y \frac{\partial S}{\partial v}(u_0, v_0) \quad (1.4)$$

と書かれる。その際、ベクトル $\partial S/\partial u, \partial S/\partial v$ の部分が曲面 S とその局所座標 (u, v) の選び方のみ依存して決まる定ベクトルで、曲線 Φ への依存性は X, Y の部分にのみ現れることに注意しておこう。(つまり曲線 Φ を動かせば X, Y の部分のみが動く。)一方逆に、二つの実数 X, Y を任意に与えて(1.4)式のような一次結合をつくれれば、それが点 P において曲面 S に接するベクトルを与えている事も明らかであろう。つまり $\partial S/\partial u, \partial S/\partial v$ は点 P における接ベクトルを表現する際の基底の役割を果たしており、 X, Y を動かした全体が(点 P における)接ベクトルの全体を与えるのである。ここまで来ると、もはや微分を考える際に使った曲線 Φ のことは忘れてしまって、単に(1.4)式のように表されるものが点 P における S の接ベクトルなのだと思っても良いだろう。そこで(1.4)式右辺のような一次結合の全体を、曲面 S の点 P における接ベクトル空間、あるいは単に接空間と呼び、 $\partial S/\partial u, \partial S/\partial v$ をその(局所座標 (u, v) に関する)座標基底と呼ぶ。点 P における曲面 S の接空間は、しばしば記号 $T_P(S)$ (あるいは単に T_P) で表わされる。

[注] 接ベクトル、あるいは接空間という言い方をするとき、それが考えている点を基準にした表現であることは暗黙のうちに了解されているものとする。よって異なる点における接空間は(それがベクトル空間としては同じであっても)すべて異なるものとする(すなわち $P \neq Q$ ならば $T_P(S) \neq T_Q(S)$ である)。各点毎の接空間 $T_P(S)$ を曲面全体にわたって集めたもの(直和集合 $\sqcup_{P \in S} T_P(S)$)を S の接ベクトルバンドル(あるいは単に接バンドル)と呼び $T(S)$ と表す。また、曲面の各点毎にファイバーと呼ばれるある幾何学的対象(ベクトル空間とか群等)を与えて、それらを曲面全体について集めたものをファイバーバンドル(ファイバー束)と呼ぶ。従って接バンドルは曲面 S 上に構築できる様々なファイバーバンドルの一つにすぎないが、ここではこれ以上立ち入らない。

[問題 1-1] 2次元球面の媒介変数表示として

$$S(\theta, \phi) = a \cos \theta \cos \phi e_1 + a \cos \theta \sin \phi e_2 + a \sin \theta e_3$$

を考える。この表示における座標基底を具体的に求めよ。

[補足] 座標基底 $\partial S/\partial u, \partial S/\partial v$ は曲面上の各点における接ベクトル空間の基底を与えるが、それらは一般には直交している訳でも、また単位ベクトルになっている訳でも無いことに注意せよ。

1.3 座標基底と関数の微分

座標基底を数学(特に多様体論)では

$$\frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}$$

の様に表す。(これは(1.2),(1.3)式の右辺に於いて、 S を省略して書いたものになっている。)ここではその意味について考える。

曲面 S 上の関数 f を考えそれを局所座標 (u, v) を用いて表すと、2変数関数 $f(u, v)$ として表現されるであろう。 Φ を点 P での微分が丁度 (1.4) に等しいような S 上の曲線とし、関数 $f(\Phi(t))$ を $t = t_0$ において微分してやると

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dt} \right)_{\Phi} \Big|_{t=t_0} &= \frac{du}{dt}(t_0) \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{dv}{dt}(t_0) \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &= X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + Y \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

を得る。この式の右辺は、丁度 (1.4) 式の S を f で置き換えたものになっている。この表示は、関数 f が何であれ成立するので f を省略してしまうと、曲線 Φ に沿った微分を表す記号 (演算子) として

$$X \frac{\partial}{\partial u} + Y \frac{\partial}{\partial v} \quad (1.6)$$

を得る。つまりある点における微分が (1.4) 式の右辺に丁度等しいような曲線に沿って S 上の関数を微分することは、(1.6) 式のような微分作用素を作用させる事に等しいのである。このとき曲線 Φ の採り方がどうであれ、その点 P における微分の成分が X, Y である限り上の微分作用素が f に作用した際の値 (つまり (1.5) 式の右辺の値) は等しいことに注意しよう。つまり微分作用素としての (1.6) 式は一点 P における X, Y の値のみから確定する。よって点 P における S の接空間 $T_P(S)$ と (1.6) のような (点 P で定義された) 一階微分作用素の全体とが一対一に対応する。このとき特に基底となる特別な接ベクトル $\partial S / \partial u, \partial S / \partial v$ に対応する微分作用素が $\partial / \partial u, \partial / \partial v$ になることは明らかであろう。これが座標基底を偏微分作用素で書く理由である。

1.4 座標基底の変換則

これ以降、局所座標も添え字を用いて $u = (u^i)_{i=1,2}$ の様に表すことにする。また記述の煩雑さを避けるためにアインシュタインの規約を用いる。 S 上の点 P における接ベクトル X を局所座標 (u^i) に関する座標基底を用いて分解した際の成分を X^i とすれば

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

である。前節で見たように、接ベクトルは考えている点における 1 階微分作用素とも考えられたから、 S 上の関数に対するその作用は

$$X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

と書かれる。いま曲面 S が別の局所座標 (媒介変数) $\bar{u} = (\bar{u}^j)$ を用いて $S(\bar{u}^j)$ とも表されるとしよう。このとき以前の局所座標を与える各 u^i ($i = 1, 2$) もまた \bar{u} の関数であると考えられる。それ故 $f(\bar{u}) = f(u(\bar{u}))$ と書いたものは合成関数の微分法則に従って

$$X(f) = X^i \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}^j}$$

と微分されるであろう。このことは、曲面上の任意の関数 f に対して成立するから、 f を外して書くと、ベクトル X の二つの局所座標表示に対して結局

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = X^i \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j}$$

という二つの表示を得る。 X の新しい局所座標基底 $\partial / \partial \bar{u}^j$ に関する成分を \bar{X}^j と書く事にすれば、これは成分に関する変換則が

$$\bar{X}^j = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} X^i$$

で与えられるという事であり、また座標基底の間の変換則が

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}^j} = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

で与えられるという事でもある。(ただし、 $\partial u^i / \partial \bar{u}^j$ は $\partial \bar{u}^j / \partial u^i$ を行列表記したものの逆行列。)

[注] 厳密に述べれば次の様になる。まず、二つのパラメータ空間 $U = \{(u^1, u^2)\}$ と $V = \{(\bar{u}^1, \bar{u}^2)\}$ の間の変換関数 $(u^1, u^2) \mapsto (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ の微分 (ヤコビ行列) を $\partial \bar{u}^i / \partial u^j$ 、その逆関数 $(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \mapsto (u^1, u^2)$ の微分 (ヤコビ行列) を $\partial u^i / \partial \bar{u}^j$ と書いてやる。このとき二つのヤコビ行列は互いに逆行列になっている (証明略)。また座標基底の変換をきちんと調べると、それはヤコビ行列を用いて書かれる事がわかる。それ故合成関数の偏微分規則を上のように書いてやると、あたかも偏微分規則から座標基底の変換則が導かれるかのように見えるのである。(これは座標基底を偏微分作用素で表す記法と相まって座標基底の変換則を覚えるための一種のトリックとなっている。) しかし実用上は上で述べたように偏微分規則から座標基底の変換則が出てくるように思っていて差し支えない。

1.5 ベクトル場

曲面 S 上の各点 P に対し、 P における接ベクトル空間 $T_P(S)$ から元 (すなわち接ベクトル) X_P を一つずつ選び出し対応させる事により、 P を変数とする S 上のベクトル値関数 $X(P) = X_P$ をつくる事が出来る。これを S 上の接ベクトル場あるいは単にベクトル場と呼び、単に記号 X で表す。ベクトル場 $X = X(P)$ は局所座標 $u = (u^i)$ を用いると、

$$X(P) = X^i(u) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

と表現される。つまりベクトル場は局所座標の上では n 個の多変数関数の組 $\{X^i(u)\}$ と考えられるが、特に断りのない限り、各 $X^i(u)$ は局所座標 $u = (u^i)$ の関数として十分なめらか (何度でも微分可能) であるものとする。曲面 S 上のベクトル場をすべて集めた集合を $\mathfrak{X}(S)$ 等で表す。ベクトル場 X, Y と実数 α, β に対し $\alpha X + \beta Y$ はまた S 上のベクトル場なので $\mathfrak{X}(S)$ は (一般に無限次元の) 線型空間である。

[補足] $\mathfrak{X}(S)$ には更に次のような性質もある。まず、曲面 S 上の関数全体の集まりを $C(S)$ と書いてやる。任意の関数 $f, g \in C(S)$ と実数 α, β に対して $\alpha f + \beta g$ はまた S 上の関数、すなわち $C(S)$ の元である。よって $C(S)$ もまた (無限次元の) 線型空間であるが、更に f と g の積 fg もまた $C(S)$ の元になっている。この意味で $C(S)$ は (実数体 R 上の) 多元環 (あるいは代数) と呼ばれるものになっている。この多元環 $C(S)$ の任意の元 (すなわち関数) f, g とベクトル場 X, Y に対して、 $f(X+Y) = fX + fY$ 及び $(f+g)X = fX + gX$ はまた S 上のベクトル場となっている。この意味で $\mathfrak{X}(S)$ は関数環 $C(S)$ 上の加群 ($C(S)$ 加群) になっているという。 $\mathfrak{X}(S)$ のこの性質は第 6 章で重要になってくるが、当面は気にしなくて良い。

2 双対基底と余接空間

2.1 双対空間 (共役空間) と双対基底

最初に、線型代数における基本概念である双対空間と双対基底の概念を復習しておく (詳しくは適当な線型代数、特に多重線型代数に関する教科書を参照せよ)。

V を n 次元ベクトル空間、 $\{e_i\}$ をその基底とする。 V の元 $v = v^i e_i$ に対し、ある実数 $a(v)$ を対応させる写像 a が線型性

$$a(\alpha u + \beta v) = \alpha a(u) + \beta a(v)$$

を持つとき、それを V 上の線型汎関数と云う。このとき任意の線型汎関数 a は

$$a(v) = a(v^i e_i) = v^i a(e_i)$$

と書けるので、個々の基底ベクトル e_i に対する値 $a(e_i)$ がわかればその総てのベクトルに対する値がわかる。そこで $a_i = a(e_i)$ とおいてやり、これを a の i 成分と呼ぶ。成分を用いれば線型汎関数は

$$a(v) = a_i v^i \tag{2.1}$$

と表示される。すなわち線型汎関数とはベクトル v の成分 (v^i) と a の成分 (と呼ばれる量) (a_i) から、上式のような線形結合をつくって得られる一次関数 (線型関数) のことである。また、上の表示からわかるように、線型汎関数 a の実態は n 個の実数の組 (a_i) に他ならず、 a, b が線型汎関数であればその線形結合 $\alpha a + \beta b$ は $(\alpha a_i + \beta b_i)$ を成分とするような線型汎関数である。このことより、あるベクトル空間 V 上の線型汎関数の全体はベクトル空間の構造を持つことがわかる。つまり線型汎関数の成分からなる n 個の実数の組 (a_i) はまた (n 次元の) ベクトルとして振る舞うのである。この (V 上の) 線型汎関数全体からなるベクトル空間を V^* で表し、元のベクトル空間 V の共役ベクトル空間あるいは単に共役空間と呼ぶ (共役の替わりに双対という用語を用いる場合もある)。そして V^* の元のことをしばしば共変ベクトル、元のベクトル空間 V の元のことを反変ベクトルと呼ぶ。(ただし、この呼び方は相対的なものであって、 V^* の方を基準にして考えれば V の元が共変ベクトルである。問題 2-1 参照のこと。)

[問題 2-1] 共役空間の共役空間は元のベクトル空間と同一視される ($(V^*)^* = V$)。

共役空間全体 V^* をベクトル空間として考える際には、その基底は何をとってもかまわないが、個々の線型汎関数を成分で考える際には元のベクトル空間の元との関連がつけやすいものを選んでおくことと便利である。実際、上の (2.1) 式より、元の空間のベクトル v の成分が (v^i) であるときに汎関数 a の成分が (a^i) になるように基底を選ぶと良いであろう。そのような V^* の基底ベクトルを σ^i とすれば、それを規定する関係式は

$$\sigma^i(e_j) = \delta_j^i$$

である。このような関係式を満たす V^* の元の組 $\{\sigma^i\}$ を元のベクトル空間の基底 $\{e_j\}$ に対する双対基底と呼ぶ。このとき明らかに

$$\sigma^i(v) = \sigma^i(v^j e_j) = v^j \sigma^i(e_j) = v^j \delta_j^i = v^i$$

であり、 σ^i はベクトル v の第 i 成分を取り出す関数になっていることがわかる。この双対基底を用いて V^* の元 a を

$$a = a_i \sigma^i$$

と表すとき、 a の v に対する値は

$$a(v) = a_i \sigma^i(v) = a_i v^i$$

となって、丁度 (ユークリッド空間における) 内積のように書ける。それゆえ、この $a(v)$ を V と V^* の双対性を表す内積と呼び、しばしば

$$a(v) = \langle a, v \rangle$$

の様に表記する。

[問題 2-2] V の基底 e_i が $\bar{e}_j = e_i A_j^i$ なる変換により基底 $\{\bar{e}_j\}$ に変換されるとき、対応する双対基底の変換を求めよ。またこの結果を用いて反変ベクトル v の成分の変換則と共変ベクトル a の (双対基底に関する) 成分の変換則を求めよ。

2.2 座標基底の双対基底と余接空間

上に述べた線型代数の一般論に従えば、曲面 S の点 P における接空間 $T_P(S)$ にもその共役空間 $T_P^*(S)$ が存在するはずである。ここではそれがどのような空間になるかを考える。そのために、接ベクトル $X \in T_P(S)$ の S 上の関数 f への作用

$$X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

を考えよう。これは X を固定して f を動かせば、接ベクトル X の微分作用素としての作用を表す式であるが、逆に f を固定して X の方を色々変えてみる事を考えよう。その際上式が、点 P におけるベクトル X に沿う方向への f の微分という意味を持っていた事 (1.3 節) を考慮し、それを X の関数とみたものを

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial u^i} X^i \quad (2.2)$$

と書いてやる事にする。このとき

$$df(aX + bY) = (aX + bY)(f) = aX(f) + bY(f) = adf(X) + bdf(Y)$$

が成立するから、 df は接空間 $T_P(S)$ 上の線型汎関数である (すなわち $df \in T_P^*(S)$) 。

曲面 S の局所座標を (u^i) とするとき、曲面上の各点に対しその局所座標の i 成分 u^i を与える写像

$$u^i: S \ni P(u^i) \mapsto u^i \in \mathbb{R}$$

を考えれば、これは一つの S 上の関数に他ならない。これを (2.2) 式の f であると考えると

$$du^i(X) = X^i$$

を得る。これは du^i がベクトル X に対し、その i 成分を与える汎関数になっている事を示す関係式である (つまり du^i は双対基底) 。それ故、この関係式を用いて上の (2.2) 式を書き換えると、

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i(X)$$

と書ける。これは任意の X に対して成立する関係式なので、線型汎関数としての関係式

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i$$

が得られる。これは多変数関数における全微分を表現する式として知られているのもと全く同一であるが、実は今ここで述べたことが、関数の全微分の数学的意味を与えているのである。つまり、関数 f の全微分とは線型汎関数 (あるいは共変ベクトル) であって、それ自身は値を持たないが、(微分の方角を表す) ベクトル X を与えてやると、その方向への微分係数 (2.2) を出力するようなもの (汎関数) なのである。そして座標関数に対する微分 du^i は、そのような汎関数を表現する際の基底 (勿論それ自身も線型汎関数) になっているのである。

こうして、 S 上の関数の全微分 df や、その特別の場合である du^i 等が接空間 $T_P(S)$ の共役空間 $T_P^*(S)$ の元になっている事がわかった。しかも座標関数の全微分 du^i は座標基底 $\partial/\partial u^i$ に関する双対基底にもなっていた。それ故、前節で述べた一般論に従えば、 $T_P^*(S)$ の元の一般形は、 $\{\omega_i\}$ を n 個の実数の組として

$$\omega = \omega_i du^i \quad (2.3)$$

と表現される。このようなものを (点 P における S) の余接ベクトルと呼び、点 P における余接ベクトルの全体を P における S の余接空間と呼ぶ。曲面 S の接空間 $T_P(S)$ とは、点 P における一階微分作用素の全体であり、 $\partial/\partial u^i$ を基底として書けたが、その共役空間 $T_P^*(S)$ は du^i を用いて (2.3) のカタチに書ける共変ベクトル (線型汎関数) の集まりなのである。こうして定義される空間 $T_P^*(S)$ を (元の接空間の) 余接空間と呼び、その元を (点 P における S の) 余接ベクトルと呼ぶ。このとき両者の (他方に対する線型汎関数としての) 関係は

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \delta_j^i, \quad \frac{\partial}{\partial u^j}(du^i) = \delta_j^i$$

で規定される。

[問題 2-3] 座標基底の変換則から双対基底 du^i の変換則を (定義に従って) 求め、それが u^i を v^j の関数と見て微分したものと一致する事を確かめよ。

2.3 一次微分形式

前節の結果より曲面 S 上の点 P における余接ベクトル ω は、座標基底 $\{\partial/\partial u^i\}$ の双対基底である $\{du^i\}$ を用いて

$$\omega_i du^i$$

と表され、その共変ベクトル（線型汎関数）としての作用は点 P における接ベクトル $X = X^i \partial/\partial u^i \in T_P(S)$ に対し

$$\begin{aligned}\omega(X) &= \omega_i du^i(X) \\ &= \omega_i du^i(X^j \frac{\partial}{\partial u^j}) \\ &= \omega_i X^j du^i(\frac{\partial}{\partial u^j}) \\ &= \omega_i X^j \delta_j^i \\ &= \omega_i X^i\end{aligned}$$

で与えられることがわかる。このようなものが S の各点に於いて定義されていればそれらをつなぎ合わせて S 全体で定義された P を変数とする共変ベクトルの場 $\omega(P)$ の概念が得られる。これを S 上の一次微分形式と呼ぶ。一次微分形式を局所座標を用いて表示してやると

$$\omega(P) = \omega^i(u) du^i$$

となるので、それは局所的には n 個の関数 $\omega_i(u)$ の組として表現されることになる。この表示を用いると一次微分形式 ω の（接）ベクトル場 X への作用が

$$\omega : \mathfrak{X}(S) \ni X \mapsto \omega(X) = \omega_i(u) X^i(u) \in C(S)$$

で定義される。ここで $C(S)$ は曲面 S 上の関数全体のつくる集合（それは線型空間でもある）を表している。つまり、一次微分形式 ω とは、ベクトル場 X に作用し、その値として S 上の関数を与えるような $\mathfrak{X}(S)$ 上の線型関数である。更にそれは任意の関数 $f \in C(S)$ に対して

$$\omega(fX) = f\omega(X)$$

という性質を持つ。このことは上に示した ω の作用の定義より明らかだろう。この性質を（ ω の）テンソル性と呼ぶことがある（テンソル性については第 6 章で詳しく議論される）。 S 上の一次微分形式全体のつくる集合を記号 $A^1(S)$ で表すことがある。1.3 節の補足で定義した用語を用いれば、 $A^1(S)$ は実線型空間であると同時に $C(S)$ 加群にもなっている。

3 計量あるいは第一基本量

3.1 計量ベクトル空間とその自己双対性

最初に計量ベクトル空間に関する基礎事項について復習する。ベクトル空間 V の計量（あるいは内積）とは V 上の非退化双線型形式、すなわち写像

$$g: V \times V \ni (u, v) \mapsto g(u, v) \in \mathbf{R}$$

であって、 u, v のそれぞれについて線型でありかつ $g(u, u) = 0$ が成り立つのは $u = 0$ のときに限るという性質を持つものを云うのであった。計量は基底に対する値 $g(e_i, e_j) = g_{ij}$ が決まれば完全に決定され、

$$g(u, v) = g(u^i e_i, v^j e_j) = u^i v^j g(e_i, e_j) = g_{ij} u^i v^j$$

により計算される。この g_{ij} (の組) をしばしば計量テンソルと呼ぶ。計量を持つベクトル空間のことを計量ベクトル空間（特にその計量が正定値であるときユークリッド的計量ベクトル空間）と呼ぶ。(有限次元)計量ベクトル空間には、その計量テンソル(を行列とみたもの)を $+1$ あるいは -1 のいずれかの値のみからなる対角行列に等しくするような特別な基底(正規直交基底)がいつでも存在する。正規直交基底をとれば計量 g はそれが正定値の場合いわゆるユークリッド内積に、またそれ以外の場合でもそれに類する簡単なカタチになるが、ここでは基底は必ずしも正規直交系になっているとは限らないものとする。

V を計量 g を持つ計量ベクトル空間、 V^* をその双対空間とする。また、 $\{e_i\}$ を V の基底、 $\{\sigma^i\}$ をその双対基底とする。計量の非退化性より計量テンソル g_{ij} を行列とみたものは逆行列を持つ。その成分を g^{ij} と書いておくと、

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad g_{il} g^{lj} = \delta_i^j$$

が成立する。このとき計量の成分 g_{ij} 及びその逆行列の成分 g^{ij} を用いて

$$\begin{aligned} V \ni u = u^i e_i &\longmapsto u^* = g_{ij} u^j \sigma^i \in V^* \\ V^* \ni v^* = v_i^* \sigma^i &\longmapsto v = g^{ij} v_j^* e_i \in V \end{aligned}$$

という2つの写像を考えることが出来る。(g^{ij}) が (g_{ij}) の逆行列であった事に注意すると、これら2つの写像は互いに逆写像の関係になっていることがわかる。つまり上の2つの写像から決まる V と V^* の間の対応関係は両者の一対一対応を与える。それ故 V^* の任意の2つの元 $u^* = u_i^* \sigma^i, v^* = v_j^* \sigma^j$ に対し、上の対応関係で u^*, v^* に対応づけられるような V の元 $u = u^i e_i, v = v^j e_j$ が存在し、またその逆も言える。このとき V と V^* の双対性を表す内積を \langle, \rangle と書けば

$$\begin{aligned} \langle u^*, v \rangle &= u_i^* \sigma^i(v^j e_j) \\ &= u_i^* v^j \sigma^i(e_j) \\ &= u_j^* v^j \\ &= g_{ij} u^i v^j = g(u, v) \end{aligned}$$

を得るが、これは \langle, \rangle が V における計量(内積)を用いて表現出来ることを示している。ここでその内積を更に上の対応関係から決まる V^* の元の成分を用いて表してやると

$$= g^{ij} u_i^* v_j^*$$

とも書けることに注意しよう。従ってこの値を $g^*(u^*, v^*)$ と表現してやれば、 g^* は V^* における(非退化)双線型形式を与えていることがわかる。つまり g^* は V^* における計量と解釈できるのである。よって (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列であると同時に V^* の計量テンソルでもあって、この記法が正当化される。このとき更に

$$g^*(u^*, v^*) = \langle u^*, v \rangle = g(u, v)$$

という関係式が成立している事にも注意しよう。つまり $u, v \in V$ に対応する V^* の元 u^*, v^* の間の g^* による内積は、もとの空間での内積と全く同じ値をとる(ただし計量テンソルの成分 g_{ij} と g^{ij} は一般には異なる事に注意しよう)。このようにして得られる計量 g^* を、 g から誘導される (V^* の) 計量と呼ぶ。このように計量ベクトル空間 V の双対空間 V^* はその計量構造も含めて V と同様に振る舞うことがわかる。特に、この対応関係で双対基底 $\{\sigma^i\}$ に対応する V の元(それを $\{e^i\}$ と書くことにする)は、元の基底に対し

$$g(e^i, e_j) = \langle \sigma^i, e_j \rangle = \delta_j^i$$

を満たすようなベクトルの組である。そこでこの関係を利用し、 V^* の元である σ^i を V の元 e^i と同一視してしまうと、上の対応関係から V^* のすべての元が V の元と同一視されることになる。つまり上の対応関係における u と u^* の区別（つまり反変ベクトルと共変ベクトルの違い）はなくなり、これらは同じものとなるのである。そこでベクトル u の、 e^i に関する成分を単に u_i と書くことにすれば、上の V と V^* の対応関係は2種類の成分 (u^i) と (u_i) の間の対応関係

$$u_i = g_{ij}u^j, \quad u^i = g^{ij}u_j$$

に読み替えられる。これが計量テンソルによる添字の上げ下げの由来である。つまり計量ベクトル空間では、ここに述べたような同一視によりベクトルの反変・共変の区別は無くなるが、元の基底とその双対基底は依然区別され、それらに関する成分の違いとして反変と共変の区別は生き残っているのである。ただし、 $\{e_i\}$ として特に正規直交基底をとれば、反変成分と共変成分の違いも無くなる（問題 3-1）。これがデカルト座標でのベクトルの成分に他ならない。

[問題 3-1] ユークリッド的ベクトル空間の正規直交基底 $\{e_i\}$ の双対基底は $\{e_i\}$ 自身と一致する。

3.2 リーマン計量

1.3 節で、座標基底は一般には単位ベクトルではなく、また直交もしていない事を注意しておいた。3次元ユークリッド空間内の2次元曲面という状況では、座標基底のベクトルとしての大きさやなす角等を具体的に計算することが出来る。実際

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial S}{\partial u^i} = \frac{\partial S^k}{\partial u^i} e_k$$

であった事に注意してこれらの（3次元ユークリッド空間での）内積をとると

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \frac{\partial S^k}{\partial u^i} \frac{\partial S^l}{\partial u^j} \langle e_k, e_l \rangle = \sum_k \frac{\partial S^k}{\partial u^i} \frac{\partial S^k}{\partial u^j}$$

を得る。ただしここでは3次元ユークリッド内積の記号として \langle, \rangle を用いている。上式の値を g_{ij} と書いておこう。これは曲面の外側の3次元空間で計算された値であるが、これらの量が曲面上の各点に於いてあらかじめ（計算され）与えられているものとする。

曲面上の任意の点 P における接空間 $T_P(S)$ おいて、 $T_P(S)$ に属する二つのベクトル

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}$$

を考えよう。これらの3次元ベクトルとしての内積は上の計算から

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = X^i Y^j \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = g_{ij} X^i Y^j$$

となる。そこで

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$$

とおいてやると、3次元空間における内積 \langle, \rangle を経由しなくても X, Y の座標基底に関する成分と g_{ij} だけから、それらの長さやなす角が計算できることがわかる。つまり曲面上で与えられた g_{ij} は、曲面の外側の世界に依存することなく曲面上の接ベクトルに関する諸量を計算する手段を与えるのである。これが前節で見た意味での計量になっていることも明らかであろう。そこで g_{ij} を曲面 S に関する第一基本量あるいは計量テンソルと呼び、 $g(\cdot, \cdot)$ を S 上の計量と呼ぶ。

[問題 3-2] 問題 1-1 で与えた球面の場合に、計量の成分を具体的に計算せよ。

曲面の概念を一般化し、その内在的幾何を論じる場合には、空間の各点（の接空間）においてこの計量が（先験的に）与えられているものとして議論を始める。このように空間の各点の接空間に（正定値）内積が与えられた幾何学的対象をリーマン空間とかリーマン多様体と呼び、その計量をリーマン計量と呼ぶ。（不定計量が与えられた場合を擬リーマン多様体などと呼ぶ。一般相対論に出てくるローレンツ多様体は、その一つの例である。）リーマン多様体の接空間は計量ベクトル空間であるから前節で述べた一般論に従って、その余接空間を接空間と同一視することが出来る。よってリーマン多様体では反変ベクトルと共変ベクトルは本質的に同じものであり、その成分は計量テンソルによる添え字の上げ下げにより互いに移り変わる。また更に接ベクトル場（反変ベクトル場）と一次微分形式（共変ベクトル場）も本質的に同じものであるといえる。

[問題 3-3] リーマン多様体における du^i と $\partial/\partial u^i$ の関係を求めよ。

[問題 3-4] 問題 1-1 で与えた球面の場合に、座標基底の双対基底を具体的に求めよ。

[問題 3-5] 局所座標を取り替えた際の計量の成分 g_{ij} の変換則を求めよ。

3.3 曲線の長さ第一基本形式

この節の最後に、曲面上で曲線の長さを計算する公式を与えておこう。 $\Phi(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ を空間曲線の媒介変数表示とすると、その曲線上の点 $a = \Phi(t_0)$ から $b = \Phi(t_1)$ までの曲線の長さ（弧長）は

$$s(a, b) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_i \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \frac{d\Phi}{dt}(t), \frac{d\Phi}{dt}(t) \right\rangle} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\Phi}{dt} \right\| dt$$

で表される。よって $\Phi(t)$ が曲面 S 上にあるときには、3次元ユークリッド内積を曲面上の計量で置き換えた

$$s(a, b) = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\Phi}{dt} \right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g\left(\frac{d\Phi}{dt}(t), \frac{d\Phi}{dt}(t)\right)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt}(t) \frac{du^j}{dt}(t)} dt \quad (3.1)$$

が曲線の長さを与える。（ただし、 $\|X\|^2 = g(X, X)$ とおいた。）

(3.1) 式で積分の下端を固定し、上端を変数とする関数 $s(t) = s(a, \Phi(t))$ を考える。すなわち、

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{d\tau}(\tau) \frac{du^j}{d\tau}(\tau)} d\tau \quad (3.2)$$

とする、 $s(t)$ は曲線に沿ってその長さを与えるパラメータであるが、この関係式を逆に解いた関数 $t(s)$ を求め、それを元の曲線の式 $\Phi(t)$ に代入してやることで、曲線 Φ の新たな媒介変数表示 $\Phi(s)$ を求めることができる。これを曲線 Φ の弧長パラメータ表示と呼び、パラメータ s を弧長パラメータと呼ぶ（弧長パラメータは習慣的に s で表す）。計量の正定値性と曲線の正則性（すなわち $d\Phi/dt \neq 0$ ）を仮定すれば、弧長パラメータ表示はいつでも存在するが、それを具体的に（既知関数で）表示することは困難であることが多い。しかし弧長パラメータ表示には幾つかの著しい性質があるので、曲率等の一般論を展開する際には多用される（以下の問題参照）。

[問題 3-7] $\Phi(s)$ を曲線の弧長パラメータ表示とすれば $\|d\Phi/ds\| = 1$ であり、かつその二階微分 $d^2\Phi/ds^2$ と一階微分 $d\Phi/ds$ は直交する。また逆に、全ての点で $\|d\Phi/dt\| = 1$ なる媒介変数表示があれば、それは弧長パラメータ表示である。

[補足] 曲線 Φ を弧長パラメータ s を用いて表示したとき、その s による二階微分の大きさ $\|d^2\Phi/ds^2\|$ が Φ の曲率である。なお、曲線 Φ が特にある平面に載っている場合には、その平面内で曲線に対する法線方向が常に定まる。そこで、平面曲線の場合には $d^2\Phi/ds^2$ と（考えている点での）単位法線ベクトル n との内積（これが $d^2\Phi/ds^2$ の（符号付）大きさを与える事に注意）により曲率を定義する。これが Φ の平面曲線としての曲率である。

(3.2) 式を t で微分してやると

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}}$$

あるいは

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \quad (3.3)$$

を得る。この式から形式的に分母を払ったものをしばしば

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

と書いて曲面 S の第一基本形式と呼ぶことがある。2.2 節での議論を思い出すと、 du^i は $T_P(S)$ 上の線型汎関数であるから、この式の意味は、それを接ベクトル $d\Phi/dt$ に作用させると

$$g_{ij} du^i du^j \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = g_{ij} * du^i \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) * du^j \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}$$

として、(3.1) の被積分部分が得られるという所にある。このことを一般化すると、第一基本形式は各点 P において、接空間 $T_P(S)$ 上の双線型形式（双線型汎関数）

$$g_{ij} du^i du^j : T_P(S) \ni X \mapsto g_{ij} du^i(X) du^j(X) \in \mathbf{R}$$

を与えていると考えることができる。更にこの双線型汎関数を S 上のすべての点で考える事により、 $g_{ij} du^i du^j$ を S 上全体で定義されたベクトル場 X に対する双線型形式（二次形式、二階共変ベクトル場）と考えることができる。これが ds^2 の数学的意味づけである。

4 共変微分

4.1 クリストッフエル記号

第一章で考えた、曲面 S 上の曲線 Φ の微分の表示をもう一度示しておこう。

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{du^i(t)}{dt} \frac{\partial \mathbf{S}(u(t))}{\partial u^i} = \frac{du^i(t)}{dt} \frac{\partial S^k(u(t))}{\partial u^i} \mathbf{e}_k$$

これを更にもう一度 t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dt^2} &= \frac{d^2u^i}{dt^2} \frac{\partial S^k}{\partial u^i} \mathbf{e}_k + \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \frac{\partial^2 S^k}{\partial u^i \partial u^j} \mathbf{e}_k \\ &= \frac{d^2u^i}{dt^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^i} + \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^i \partial u^j} \end{aligned}$$

を得る。 S 上の曲線 Φ の微分 $d\Phi/dt$ は S に接するベクトルであったが、その二階微分 $d^2\Phi/dt^2$ は一般には S の接ベクトルにはならない。実際上式の第一項は $\partial \mathbf{S}/\partial u^i$ で書けており、 S に接するベクトルになっているが、第二項に現れる

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 S^k}{\partial u^i \partial u^j} \mathbf{e}_k$$

は一般には接空間をはみ出してしまう。以下ではこの $\partial^2 \mathbf{S}/\partial u^i \partial u^j$ について調べる。

曲面の媒介変数表示における座標基底は曲面上の点における接空間の基底を与えていたから、それら全てに直交する単位ベクトル（すなわち単位法線ベクトル）を考え、それを \mathbf{n} とおく。接空間の座標基底と \mathbf{n} の組み合わせは曲面上の各点において、元の 3 次元空間の中での基底ベクトルになり得る事に注意し、ベクトル $\partial^2 \mathbf{S}/\partial u^i \partial u^j$ をそれらを用いて次のように表現してやる。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^k} + h_{ij} \mathbf{n} \quad (4.1)$$

つまり $\partial^2 \mathbf{S}/\partial u^i \partial u^j$ を接空間の方向とそれに垂直な方向に分解したときの、接空間方向成分を座標基底で表した際の成分を Γ_{ij}^k 、垂直成分を h_{ij} とするのである。ただし、現時点では形式的分解を行ったのみで、それらの成分が具体的にどうなるかはこれから考えていかねばならない。以下ではそれを考える。

上の (4.1) 式とベクトル $\partial \mathbf{S}/\partial u^k$ との 3 次元内積をとってやると

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^k}, \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle = g_{kl} \Gamma_{ij}^l$$

を得る。そこでこの $g_{kl} \Gamma_{ij}^l$ のことを $[k, ij]$ と書いておこう。 $[k, ij] = \langle \partial \mathbf{S}/\partial u^k, \partial^2 \mathbf{S}/\partial u^i \partial u^j \rangle$ でもあるので、明らかに $[k, ij] = [k, ji]$ である。また、3.2 節で見た、(3 次元空間内の) 曲面の計量テンソルの定義である $g_{ij} = \langle \partial \mathbf{S}/\partial u^i, \partial \mathbf{S}/\partial u^j \rangle$ の両辺を u^l で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial u^l} g_{ij} = [i, jl] + [j, li]$$

を得る。同様に

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jl} = [j, li] + [l, ij] \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u^j} g_{li} = [i, jl] + [l, ij]$$

そこでこの第 2 式と第 3 式の和から第一式を引き、全体を 2 で割ると

$$[l, ij] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{ij} \right\}$$

を得る。この式は $[l, ij]$ が第一基本量（計量）だけから計算できる事を示している。この式で定義される $[l, ij]$ を第一種のクリストッフエル記号という。更にこの式と g^{kl} の縮約をとって第二種のクリストッフエル記号

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} \right\}$$

が得られる。 $[k, ij]$ と Γ_{ij}^k の関係を思い返せば、この第二種のクリストッフエル記号 $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ が (4.1) 式の Γ_{ij}^k を与えることがわかる。

[問題 4-1] 問題 1-1 の球面の場合に、 Γ_{ij}^k を具体的に計算せよ。

4.2 測地線

前節で見た曲線 Φ の 2 階微分の表記とベクトル $\partial^2/\partial u^i \partial u^j$ の分解より、 $d^2\Phi/dt^2$ で表されるベクトルの曲面 S に接する成分として

$$\left(\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

を取り出すことが出来る。これを 0 とおいた方程式（を成分毎に書いたもの）

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0$$

を測地線の方程式と呼び、この方程式を満たす S 上の曲線を測地線と呼ぶ。

測地線には、その曲面に滑らかに拘束された物体の慣性運動（外力を受けない運動）の軌跡、あるいは曲面上の 2 点を結ぶ曲線でその長さの極値を与えるものとしての意味づけを与えることが出来る。しかし、ここでは先を急ぐので詳しくは述べない。

4.3 共変微分

曲面 S 上に接ベクトル場 Y が与えられているとし、それを S の局所座標 $u = (u^i)$ を用いて $Y(u)$ のように表しておく。 S 上の曲線 Φ は実数直線のある部分集合からパラメータ空間 U への写像 $t \mapsto u(t) = (u^i(t))$ を用いて $S(u(t))$ と表されるから、その曲線上でベクトル場 Y を見たものは

$$Y(u(t)) = Y^i(u(t)) \frac{\partial}{\partial u^i} = Y^i(u(t)) \frac{\partial S^k(u(t))}{\partial u^i} \mathbf{e}_k$$

と表される。これを t で微分すると

$$\frac{dY(u)}{dt} = \frac{du^j}{dt} \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} \frac{\partial S^k}{\partial u^i} \mathbf{e}_k + Y^i \frac{du^j}{dt} \frac{\partial^2 S^k}{\partial u^i \partial u^j} \mathbf{e}_k$$

あるいは

$$= \frac{du^j}{dt} \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} + Y^i \frac{du^j}{dt} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}$$

を得る。これはベクトル場 Y を曲線 Φ に沿って微分したものであるが、以前見たように、ベクトル $\partial^2/\partial u^i \partial u^j$ は一般には接空間をはみ出すので、この量自体は S 上の生物にとって認識可能な量ではない。そこで前回と同様に

$$\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} + h_{ij} \mathbf{n}$$

と分解してやり、曲面 S に接する成分だけを取り出すことにしよう。またその際、 $du^i/dt = X^i$ と書いてやることにすると、 dY/dt の S に接する成分として

$$X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

を得ることが出来る。これをベクトル場 Y の曲線 Φ に沿った共変微分と呼ぶ。

上の定義式に出てくるベクトル X^i は曲線 Φ の（考えている点での）接線の方向を表すベクトルであるから、これはベクトル場 Y を $X = X^i \partial/\partial u^i$ の方向に（共変）微分したものだともできる。従って共変微分概念は、曲線 Φ の代わりに、各点毎に方向場 $X = (X^i)$ （つまりベクトル場 X ）が与えられている状況の下でも考えることが出来る。よって、より一般に、曲面上二つのベクトル場 X, Y があるとき、ベクトル場 X によるベクトル場 Y の共変微分を

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

により定義する事が出来る。

4.4 第二基本量と曲率

4.1 節でやり残した h_{ij} について、ここで考えよう。

曲面 S 上の点 P の近傍における局所座標を $u = (u^i)$ と表しておき、その座標で点 P が $u_0 = (u_0^i)$ と表されているとする。また、点 P における S の単位法線ベクトルを \mathbf{n} で表し固定しておく。曲面 S 上の点 $S(u)$ と $P = S(u_0)$ の (3次元空間内における位置ベクトルとしての) 差と \mathbf{n} の内積を考えると、これは点 P における S の接平面から計った曲面 S の高さになる。

[問題 4-2] このことを図を描いて確かめよ。

よって、それを $h(u)$ とおくと、

$$h(u) = \langle S(u) - S(u_0), \mathbf{n} \rangle \quad (4.2)$$

である。このとき明らかに $h(u_0) = 0$ であるが、更に $\partial h / \partial u^i(u_0) = 0$ でもある。実際 $S(u) = S^k(u) \mathbf{e}_k$ に注意して (4.2) 式を u^i で偏微分してやると、

$$\frac{\partial h}{\partial u^i} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \mathbf{n} \right\rangle$$

を得るが、そこで $u = u_0$ とおけば、 \mathbf{n} が座標基底と直交する事からそれは 0 となる。つまり、 $h(u)$ を u^i のべきに展開した際の定数項及び一次の項の係数は零である。

この式を更に u^j で偏微分してやると、

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^i \partial u^j} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}, \mathbf{n} \right\rangle = h_{ij}$$

を得る (h_{ij} の定義を思い出す事)。つまり (4.2) 式で定義される関数 h の二階偏導関数として、あるいは $\partial^2 S / \partial u^i \partial u^j$ と \mathbf{n} の 3次元内積として h_{ij} は書けるのである。こうして決まる h_{ij} を (曲面 S の) 第二基本量と呼ぶ。以下では曲面の第二基本量と曲率の関係について述べるが、その前に 2次元曲面の曲率の定義を復習しておく。

[法曲率] 曲面 S 上の点 P における (この曲面の) 法線ベクトル \mathbf{n} と接ベクトル X に対し、 \mathbf{n} と X で決まる平面と S の交わりとして出来る平面曲線の点 P における (平面曲線としての) 曲率を、 S の P における X 方向の法曲率と云う。

[主曲率] 曲面 S 上の点 P において、方向 X を動かしたときの P における S の法曲率の最大値と最小値を P における S の主曲率と云い、主曲率を与える方向を主方向と云う。

[平均曲率、ガウス曲率] λ_1, λ_2 を点 P における曲面 S の主曲率とする。このとき、

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad , \quad K = \lambda_1 \lambda_2$$

をそれぞれ曲面 S の平均曲率、ガウス曲率と云う。

[補題] 曲面の主曲率 λ_1, λ_2 は

$$g_{ij} \xi^i \xi^j = 1 \quad (4.3)$$

という条件の下で ξ^1, ξ^2 が動く際の

$$h_{ij} \xi^i \xi^j \quad (4.4)$$

の最大値、最小値として与えられる。

[問題 4-3] 曲面上の曲線の弧長パラメータ表示を考え、その二階微分と単位法ベクトルの内積から得られる曲率 (法曲率) を考える事でこれを示せ。(3.3 節の補足参照。)

[定理] 2次元曲面の第一基本量を g_{ij} 、第二基本量を h_{ij} とする。曲面の主曲率は 2次方程式

$$\lambda^2 - g^{ij} h_{ij} \lambda + \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = 0$$

の 2根 λ_1, λ_2 で与えられる。また平均曲率は $(\lambda_1 + \lambda_2)/2 = (1/2)g^{ij} h_{ij}$ 、ガウス曲率は $\lambda_1 \lambda_2 = \det(h_{ij}) / \det(g_{ij})$ である。(あるいは、 (h_{ij}) を成分とする行列を \mathcal{H} 、 (g_{ij}) を成分とする行列を \mathcal{G} とするとき、主曲率は行列 $\mathcal{H}\mathcal{G}^{-1}$ の固有値として与えられる。)

[問題 4-4] 上の補題を (4.3) を拘束条件とする関数 (4.4) の条件付極値問題と考え、それを Lagrange の未定乗数法を用いて解く事によりこれを示せ。(ただし、 \mathbf{n} の採り方の自由度に応じて主曲率、平均曲率の符号は逆転し得る。)

5 曲率テンソル

5.1 曲率テンソル

曲面上に二つの（接）ベクトル場 X, Y があるとき、 X による Y の共変微分と Y による X の共変微分は一般には異なる。そこで

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

与えられる新たな（接）ベクトル場を考え、これをベクトル場 X と Y の括弧積と呼ぶ。これを局所座標を用いて成分表示してやると

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

を得る。

[問題 5-1] これを示せ。

[問題 5-2] $[\partial/\partial u^i, \partial/\partial u^j] = 0$ を示せ。

更にもう一つの（接）ベクトル場 Z があるとき

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

で定義される曲面上の接ベクトル場を考える。これはベクトル場 Z に幾つかの共変微分演算を施して得られるベクトル場であるから、確かに曲面上の接ベクトル場になるが、その見方を少し説明しておこう。まずベクトル場 Z に対する作用素としての ∇_X, ∇_Y を考えれば、その作用は一般に演算の順序に依存する（つまり ∇_X と ∇_Y は可換ではない）。そこで、その差を $R(X, Y)$ としたいのであるが、そのままでは $R(X, Y)Z$ がうまい性質（テンソル性: 詳しくは第 6 章で説明）を持たない。そこで補正項として上の括弧積から決まる $\nabla_{[X, Y]}$ による共変微分を引いておく。こうして定義される演算子

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

を $R(X, Y)$ とし、それを Z に作用させて得られる接ベクトル場を $R(X, Y)Z$ と書くのである。こうしておく、 $R(X, Y)Z$ は X, Y, Z のいずれに関しても、関数倍が前に出るという性質 $R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$ を持つ。

[問題 5-3] これを示せ。

このとき、ベクトル場の局所座標表示 $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j, Z = Z^k \partial_k$ （ただし、 $\partial_i = \partial/\partial u^i$ ）に対し、

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k$$

が成立することは容易にわかる。つまり、 $R(X, Y)Z$ の具体的な値は $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k$ を知っていれば計算出来るのである。一方、 $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k$ はその定義より S 上の接ベクトル場なので、それは座標基底を用いて

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R^l{}_{kij} \partial_l$$

と展開される。従って $R(X, Y)$ の作用は $R^l{}_{kij}$ によって完全に決まるのであるが、それは結局三つのベクトル場 X, Y, Z を変数としてベクトル場を値とする関数 $R(X, Y, Z)$ を決めていることになる（つまり 3 階共変 1 階反変混合テンソルである）。これを（曲面 S の）曲率テンソルと呼ぶ。曲率テンソルの成分 $R^l{}_{ijk}$ を定義に戻って計算すると

$$R^l{}_{kij} = \frac{\partial \Gamma^l{}_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^l{}_{ki}}{\partial u^j} + \Gamma^m{}_{kj} \Gamma^l{}_{mi} - \Gamma^m{}_{ki} \Gamma^l{}_{mj}$$

を得る。

[問題 5-4] これを示せ。

曲率テンソルの成分を具体的に計算するには

$$R_{hkij} = g_{hl} R^l{}_{kij}$$

とおいた共変曲率テンソルを用いた方が便利な場合もある。この形式での成分は

$$R_{hkij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 g_{hi}}{\partial u^k \partial u^j} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial u^h \partial u^i} - \frac{\partial^2 g_{hj}}{\partial u^k \partial u^i} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^h \partial u^j} \right\} + g_{ab} \left\{ \Gamma^b{}_{hi} \Gamma^a{}_{kj} - \Gamma^b{}_{hj} \Gamma^a{}_{ki} \right\}$$

と表される。

[問題 5-5] これを示せ。

5.2 リッチテンソル・曲率スカラー

リーマンの曲率テンソル R_{hijk} の満たす関係式を（証明なしで）幾つか述べておく。

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= -R_{ihjk} = R_{ihkj} \\ R_{hijk} &= R_{jkhi} \\ R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} &= 0 \end{aligned}$$

これらの関係式よりただちに $R_{iiii} = R_{hiii} = R_{hhii} = 0$ 等が得られ、曲率テンソルの多くの項が 0 である事がわかる。特に 2 次元の場合、最終的に生き残る項は、本質的には R_{1212} だけになる。（注： $R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$ ）

[問題 5-6] 2 次元の場合に、上に述べたことを確かめよ。

[問題 5-7] 問題 1-1 に見た球面の場合に曲率テンソルの成分を具体的に計算せよ。

[問題 5-8] $(u, v) \mapsto (u \cos(v), u \sin(v), u)$ で媒介変数表示される曲面の曲率テンソルを計算せよ。

[問題 5-9] $(u, v) \mapsto (u, a \cos(v), a \sin(v) + a)$ で媒介変数表示される曲面の曲率テンソルを計算せよ。

次に、曲率テンソルから縮約によって得られる幾つかの量の定義を述べておく。これらの幾何学的意味については後の節で説明される。

リッチテンソル

$$R_{ij} = -R_{ijk}^k = -g^{kl} R_{lijk}$$

曲率スカラー

$$R = g^{ij} R_{ij} = -g^{ij} g^{kl} R_{kijl}$$

[問題 5-10] 上の問題 5-7, 8, 9 のそれぞれの場合についてリッチテンソル、曲率スカラーを具体的に計算せよ。

5.3 ガウスの基本定理

次に曲面論における重要な結果であるガウスの基本定理について述べておく。

以前見た（リーマン計量から決まる）クリストッフェル記号 Γ_{ij}^l を用いた $\partial^2 / \partial u^i \partial u^j$ の分解式

$$\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial u^l} + h_{ij} \mathbf{n}$$

（これをガウスの公式と呼ぶ）と、第二基本量の定義

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^i \partial u^j} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}, \mathbf{n} \right\rangle$$

を思い出しておこう。まず $\partial / \partial u^i$ と \mathbf{n} の直交性を表す $\langle \partial / \partial u^i, \mathbf{n} \rangle = 0$ の両辺を u^j で微分して

$$h_{ij} + \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j} \right\rangle = 0 \quad (5.1)$$

を得る。一方、 $\|\mathbf{n}\|^2 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ を u^i で偏微分すると、

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i}, \mathbf{n} \right\rangle = 0$$

なので各 $\partial \mathbf{n} / \partial u^i$ は \mathbf{n} と直交し、それ故 S の接空間 $T_p(S)$ に入る。従ってそれらを座標基底 $\partial / \partial u^i$ を用いて表すことが出来る。それを

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j} = \Lambda_j^l \frac{\partial}{\partial u^l}$$

と書いて (5.1) 式に代入すると

$$h_{ij} + g_{il} \Lambda_j^l = 0$$

を得る。これより $\Lambda_j^l = -g^{li} h_{ij}$ なので結局

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} = -g^{jk} h_{ij} \frac{\partial}{\partial u^k}$$

が得られる（これをワインガルテンの公式と呼ぶ）。こうして $\partial \mathbf{n} / \partial u^i$ の具体的な表示が得られたので、これを用いてガウスの公式を更に偏微分してやると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial u^k \partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^l} + \Gamma_{ij}^l \frac{\partial^2}{\partial u^l \partial u^k} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} \mathbf{n} + h_{ij} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^k} \\ &= \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^a \Gamma_{ak}^l - h_{ij} h_{ka} g^{al} \right] \frac{\partial}{\partial u^l} + \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^l h_{lk} \right] \mathbf{n} \end{aligned}$$

を得る。これの k と i を入れ替えた式を作り辺々引算をすると左辺は消えるので、結局

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^a \Gamma_{ak}^l - \Gamma_{kj}^a \Gamma_{ai}^l = (h_{ij} h_{ka} - h_{kj} h_{ia}) g^{al}$$

及び

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{kj}^l h_{li} = 0$$

という式を得る（この前者をガウスの方程式、後者をコダッチ-マイナルディの方程式と呼ぶことがある）。これが曲面の第一基本量と第二基本量の間関係を与える関係式になるが、前者の左辺が曲率テンソルの成分 R_{jki}^l に等しいことに注意し g_{al} を掛けて縮約すると

$$R_{hjki} = h_{ij} h_{kh} - h_{ik} h_{jh}$$

を得る。特に 2 次元の場合は

$$R_{1212} = h_{22} h_{11} - h_{21} h_{12}$$

であるが、4.4 節の結果を見れば、この右辺がガウス曲率の $\det(g)$ 倍に等しいことがわかる。リーマンの曲率テンソルが曲面の内在的である第一基本量（計量）から共変微分と代数計算だけから得られた事を考えると、それは曲面にとっての内在的であると考えて良いだろう。一方、第二基本量は、4 章でみたように、共変微分をとる際に捨て去ってしまった量から計算されたもので、曲面を外側からみる視点から得られるものである。従って、両者の間に関係式が有ることはある意味驚きとも言えるが、この結果が述べている事は結局、曲面のガウス曲率は（外的な量である第二基本量で定義されているにもかかわらず）内在的な量であるという事である。

こうして我々は与えられた曲面（の媒介変数表示）から出発して、その第一基本量と第二基本量を及びそれらの間に成り立つの関係式を得た。この第一基本量と第二基本量は曲面を表現するのに十分な情報を持っているといえるであろうか？ つまり、局所座標 (u^i) の関数として第一基本量と第二基本量に関する相当する関数を任意に与えた場合に、それらはある一つの曲面を定めるであろうか？ 本稿ではその問題について解説している余裕は無いが、答えは yes である。ただし、任意に与えた関数が曲面を定めるわけではなく、それらは上に述べたガウスの方程式及びコダッチ-マイナルディの方程式を満たしていなくてはならない。つまり上記二組の式は、第一基本量と第二基本量が曲面を定めるための積分可能条件になっているのである。（これがそれらを公式ではなく方程式と呼ぶ理由である。）

5.4 断面曲率

p を n 次元リーマン多様体 M の一点とする (n は 2 以上)。点 p における一次独立な二つの接ベクトル X, Y とリーマンの曲率テンソルから

$$\frac{g(R(X, Y)Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - g(X, Y)^2}$$

という量をつくる。（ただし $g(\cdot)$ はリーマン計量 g による（接空間での）内積で、 $|x|^2 = g(x, x)$ とする。）これは X と Y の張る平面 L に接して点 p を通る全ての測地線が作る M 内の 2 次元曲面の（点 p における）ガウス曲率に相当する量になる。これを $K_p(L)$ と書き、点 p と平面 L から決まる M の断面曲率あるいはリーマン曲率と呼ぶ。断面曲率は、点 p と平面 L だけから決まり、 L を指定する接ベクトル X, Y の具体的な選び方には依らないのであるが、以下の説明の都合上これを $K_p(X, Y)$ と書くことにする。 $X = (X^i), Y = (Y^j)$ として断面曲率を成分表示すると、

$$\begin{aligned} K_p(X, Y) &= \frac{g_{lm} R_{kij}^m X^i Y^j Y^k X^l}{(g_{ij} g_{kl} - g_{ik} g_{jl}) X^i X^j Y^k Y^l} \\ &= \frac{R_{lkij} X^l Y^k X^i Y^j}{(g_{li} g_{kj} - g_{lj} g_{ki}) X^l Y^k X^i Y^j} \end{aligned}$$

を得る。

[問題 5-11] これを示せ。(ヒント: R, g のテンソル性を活用する事)

特に X, Y として、互いに直交する単位ベクトルをとると上の定義式の分母が 1 になる事を注意しておこう。また X, Y として座標基底 ∂_a, ∂_b をとると

$$K_p(\partial_a, \partial_b) = \frac{R_{abab}}{g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}}$$

を得る。

[問題 5-12] 2次元の場合に上の断面曲率がガウス曲率に相当することを確認せよ。(4.4 節及び 5.3 節も参照。)

5.5 リッチ曲率・スカラー曲率

n 次元リーマン多様体の接空間は n 次元ユークリッド空間とみなせるので、互いに直交する n 個の単位ベクトル(つまり正規直交系)をとることが出来る。これを $h(k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) と書き、その反変成分を $h(k)^i$ と書くことにしよう。この中のベクトルを一つ固定しそれを $h(a)$ としておく。この $h(a)$ に対し、他の ($n-1$ 個の) $h(b)$ とのペアから断面曲率をつくりそれらを全て加えて

$$\begin{aligned} Q(h(a)) &= \sum_b K_p(h(a), h(b)) \\ &= \sum_b R_{lkij} h(a)^l h(b)^k h(a)^i h(b)^j \end{aligned}$$

とおく。ここで b に関する和をまずとるのであるが、その際次のことに注意する。

まず、 $h(k)$ が正規直交系をつくることより

$$g(h(e), h(f)) = g_{ij} h(e)^i h(f)^j = \delta_{ef}$$

であるが、 $g_{ij} h(e)^i$ が $h(e)$ の共変成分 $h(e)_j$ であることに注意すると

$$h(e)_j h(f)^j = \delta_{ef}$$

なる関係式を得る。これは $h(i)$ の共変成分表示を並べて作られる行列と、その反変成分を(縦横逆に)並べて作られる行列が互いの逆行列になっている事を示す関係式といえる。よって(行列としての)積の順序を変えた場合の成分の間の関係式を書いてやれば

$$\sum_e h(e)_i h(e)^j = \delta_i^j$$

これに更に g^{mi} を掛けて縮約すると

$$\sum_e h(e)^i h(e)^j = g^{ij}$$

を得る。これを用いて上の $Q(h(a))$ を変形すると

$$Q(h(a)) = R_{lkij} h(a)^l h(a)^i g^{kj} = -g^{jk} R_{kl ij} h(a)^l h(a)^i = R_{ji} h(a)^l h(a)^i$$

を得る。これはリッチテンソル R_{ij} から作られる二次形式にベクトル $h(a)$ を代入したものに他ならない。

つまりリッチテンソルとベクトル $X = (X^i)$ から決まる二次形式を $Q(X) = R_{ij} X^i X^j$ として、 Q にある方向を向く単位ベクトル h を代入したもの $Q(h)$ は、 h とそれに直交する $n-1$ 個の方向ベクトルから得られる $n-1$ 枚の平面に関する断面曲率全ての和に等しい。これをリーマン多様体 M の点 p における h 方向のリッチ曲率と呼ぶ。これがつまりリッチテンソルの幾何学的意味である。

次に点 p におけるリッチ曲率 $Q(h(a))$ を、 n 個の(直交する)すべての方向について足し合わせたものを考えよう。このとき先ほどと同じ議論により

$$\begin{aligned} \sum_k Q(h(a)) &= \sum_a R_{ij} h(a)^i h(a)^j \\ &= R_{ij} g^{ij} \\ &= R \end{aligned}$$

となり、曲率スカラー R が得られるが、この値をリーマン多様体 M のスカラー曲率と呼ぶことにしよう。つまりスカラー曲率は、ある点における n 個の直交する方向から二つの異なる方向を選ぶとき、その全ての順列に関する断面曲率の総和に等しい。これがリーマン多様体におけるスカラー曲率 R の幾何学的意味である。

従ってある点 p における M の断面曲率が、すべての方向に関して等しく K であったとすると、

$$R = n(n-1)K$$

を得る。例えば、半径 a の 2 次元球面のガウス曲率は $1/a^2$ で、そのリーマン多様体としてのスカラー曲率は $2/a^2$ である。

6 接続

この章では第4章で(初等的に)導入した共変微分概念を再考し、接続及び平行移動という概念を導入する。これによりユークリッド空間内の(超)曲面という描像を離れて、一般の多様体上に共変微分が定義できるようになる。またここでは共変微分を一般のテンソル場に対して拡張することを行う。その準備として、最初にテンソルの代数とテンソル場について復習する。今後は(正式の定義はまだしていないが)多様体という用語をことわりなく使う。

6.1 テンソル積とテンソル空間

V を n 次元(実)ベクトル空間とし、 V^* をその双対空間とする。 $\{e_i\}$ を V の基底とすると、 $\{e^j\}$ によりその双対基底を表すことにする。 σ 及び τ を V 上の線型汎関数(すなわち $\sigma, \tau \in V^*$)として $u, v \in V$ に対して $\psi(u, v) = \sigma(u)\tau(v)$ とおくと、 ψ は $V \times V$ から R への写像であって u, v のいずれに対しても線型性を持つ(問: 確かめよ)。これを線型汎関数 σ と τ のテンソル積と呼び $\sigma \otimes \tau$ で表す。テンソル積の特別な場合として双対基底のテンソル積 $e^i \otimes e^j$ を考えることができるが、これは $u = u^l e_l, v = v^k e_k$ に対し、その i 成分と j 成分の積 $u^i v^j$ を対応させる関数である。更にこれらの一次結合 $a_{ij} e^i \otimes e^j$ の $V \times V$ への作用を $a_{ij} e^i \otimes e^j(u, v) = a_{ij} e^i(u) e^j(v) = a_{ij} u^i v^j$ で定義すれば、これは $V \times V$ 上の2重線型形式(双線型形式)である。一方逆に、直積集合 $V \times V$ から R への写像 $\psi(u, v)$ で、 u, v のいずれに関しても線型であるもの(つまり2重線型関数)は $e^i \otimes e^j$ の一次結合で書くことができる(問: これを示せ)。これらのことより、 $V \times V$ 上の2重線型形式の全体は実ベクトル空間の構造を持ち、その基底は $e^i \otimes e^j$ で与えられ、その次元は n^2 であることがわかる。それ故このベクトル空間を記号 $V^* \otimes V^*$ で表し V^* と V^* のテンソル積と呼ぶ。またその元を2階の共変テンソルと呼ぶ。

同様に V の r 個の直積 $V \times V \times \cdots \times V$ から実数体 R への r 重線型写像(r 個の変数のどれに関しても線型なもの)を r 階の共変テンソルと呼ぶ。その全体は n^r 次元の線型空間であって V^* の r 個のテンソル積 $V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ (これを $\otimes^r V^*$ と書く)として構成される。同様の議論を v^* の直積上の多重線型形式について行う事で、高階の反変テンソルと v のテンソル積 $\otimes^s V$ の概念が得られ、その基底は一般に $e_i \otimes \cdots \otimes e_j$ で与えられる。更に V^* の r 個の直積と V の s 個の直積の直積から実数体 R への多重線型写像

$$\tau: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_r \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_s \longrightarrow R$$

として、 V 上の r 階反変 s 階共変テンソル(混合テンソル) τ が定義され、その全体 $V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ を $T_s^r(V)$ と書く。 r 階反変 s 階共変テンソル τ は基底のテンソル積を用いて

$$\tau = \tau_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

のかたちに一意的に表される。このようにベクトル空間 V を基に多重線型形式(多重線形関数)を考えることで多数の線型空間が作られるが、これらを一般にテンソル空間、その元をテンソルと云う。

次に混合テンソルのもう一つの別の見方を与えよう。例えば1階反変1階共変混合テンソル $\xi = \xi_j^i e_i \otimes e^j$ は $V^* \times V$ 上の2重線型形式であるが、その V への作用が

$$\xi: V \ni u \mapsto \xi(u) = \xi_j^i (e_i \otimes e^j)(u) = \xi_j^i e^j(u) e_i = (\xi_j^i u^j) e_i \in V$$

により自然に定義される。これは V から V への(1重)線型写像、すなわち V の線型変換を与える。同様に(1, s)型混合テンソル(1階反変 s 階共変テンソル) $\tau = \tau_{j_1 \cdots j_s}^i e_i \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$ は

$$\tau: V \times \cdots \times V \ni (u_1, \cdots, u_s) \mapsto \tau_{j_1 \cdots j_s}^i u_1^{j_1} \cdots u_s^{j_s} e_i \in V$$

により V の s 個の直積集合から V への s 重線型写像を与える。一方逆に V の s 個の直積集合から V への s 重線型写像が与えられれば、それは一つの(1, s)型混合テンソルを与える。

[問題] これを示せ。

6.2 テンソル場

これらの概念は容易に多様体上に拡張する事が出来る。実際多様体 M の各点には接空間 $T_p(M)$ と余接空間 $T_p^*(M)$ が定義されているので、これらを基に各点でテンソル空間 $T_s^r(T_p(M))$ を構成することが出来る。多様体の各点に、そのテンソル空間から一つずつ元を選び出して対応させることで多様体上のテンソル場の概念が得られる。テンソル場 τ は局所座標 $u = (u^i)$ を用いて

$$\tau(u) = \tau(u)_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_s}$$

と表示される。このとき $\tau(u)$ を別の局所座標 $\bar{u} = (\bar{u}^j)$ を用いて表示した場合の成分が

$$\bar{\tau}_{i_1 \dots i_s}^{k_1 \dots k_r} = \frac{\partial \bar{u}^{k_1}}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}^{k_r}}{\partial u^{i_r}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^s} \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

により与えられる事は、座標基底（及びその双対基底）の変換則から容易にわかる。

多様体 M 上に r 階反変 s 階共変テンソル場 τ が与えられているとき、 $\omega_1, \dots, \omega_r$ を M 上の一次微分形式、 X_1, \dots, X_s を M 上のベクトル場として

$$\tau(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) = \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} (\omega_1) \dots \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} (\omega_r) du^{j_1} (X_1) \dots du^{j_s} (X_s)$$

とおくことにより、線型写像

$$\tau: A^1(M) \times \dots \times A^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \dots \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C(M)$$

をつくる事が出来る。ただし $A^1(M)$ は M 上の一次微分形式全体からなる線型空間、 $\mathfrak{X}(M)$ は M 上のベクトル場全体からなる線型空間であり、写像の定義域は、 $A^1(M)$ が r 個、 $\mathfrak{X}(M)$ が s 個からなる直積集合になっている。また値域の $C(M)$ は M 上の（なめらかな）関数全体からなる線型空間である。この写像が $r+s$ 重線型写像である事はその定義より明らかであるが、更に f を M 上の任意関数（すなわち $f \in C(M)$ ）として

$$\tau(\omega_1, \dots, f\omega_k, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) = \tau(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, fX_l, \dots, X_s) = f\tau(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)$$

が成立する（問：確認せよ）。つまりテンソル場 τ は、その任意の変数を関数倍するとき、（その関数が定数のように前に出て） τ 全体が関数倍されるという性質を持っている。この性質を τ のテンソル性と呼ぶ。（テンソル性は関数倍に関する一種の線型性であり、これを数学用語では「 $C(M)$ 加群としての線型性」と呼ぶ。）一方逆に次の定理が成立する。

[定理] $A^1(M)$ と $\mathfrak{X}(M)$ の (r, s) 個の直積集合から $C(M)$ への多重線型写像 L でテンソル性（ $C(M)$ 加群としての線型性）を持つものは、 (r, s) 型のテンソル場 τ により

$$L(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) = \tau(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)$$

のかたちに一意的に表される。（問：これを示せ）

このことから、 M 上のテンソル場を $A^1(M)$ と $\mathfrak{X}(M)$ の適当な個数の直積集合から $C(M)$ への $C(M)$ 加群としての多重線型写像であると（代数的に）定義することが出来る。

[注] 従って、一次微分形式とベクトル場を変数とする関数がテンソル（場）である事を示すには、それが通常の意味で多重線型写像になっている事を示すと同時に、関数倍が前に出ることを示せば良い。そうすると、成分のテンソルとしての変換則は上の定理から自動的に従う事になる。これが上に述べた性質（関数倍が前に出る）をテンソル性と呼ぶ理由である。

更に前節と同様に考えて、 $\mathfrak{X}(M)$ の s 個の直積集合から $\mathfrak{X}(M)$ への $C(M)$ 加群としての s 重線型写像により $(1, s)$ 型の混合テンソル場を定義することも出来る。

[証明] $K(X_1, \dots, X_s)$ を、ベクトル場 $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ を変数とし、 $\mathfrak{X}(M)$ に値をとる $C(M)$ 加群としての s 重線型写像（ s 重実線型写像でテンソル性を持つもの）とする。 X_k を局所座標を用いて $X_k = X_k^j \partial_j$ と表しておけば、 K の $C(M)$ 加群としての線型性より

$$K(X_1, \dots, X_s) = X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} K(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})$$

を得る。ここで $K(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})$ は $\mathfrak{X}(M)$ の元であるから、基底 $\{\partial_i\}$ を用いて

$$K(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) = K_{j_1 \dots j_s}^i \partial_i$$

と一意的に表すことが出来る。よって K は

$$K = K_{j_1 \dots j_s}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_s}$$

のかたちに一意的に表すことが出来、 $(1, s)$ 型のテンソル場を与えていることがわかる。

[テンソル場の縮約]

6.3 共変微分の分解

4.3 節でみた共変微分の定義式

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

を思い出すと、共変微分について次の性質があることがただちにわかる。

$$\nabla_{a_1 X_1 + a_2 X_2} Y = a_1 \nabla_{X_1} Y + a_2 \nabla_{X_2} Y \quad (6.1)$$

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2 \quad (6.2)$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \quad (6.3)$$

ただし a_1, a_2 は実数で f は (曲面あるいは多様体上の) 関数である。更に、少し計算してやると

$$\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y \quad (6.4)$$

であることもすぐわかるだろう。これは共変微分演算が積の微分に関するライプニッツの規則であると解釈できる。

[問題] このことを確かめよ。

また、共変微分の定義式で、 X, Y に座標基底 (の定めるベクトル場) を入れてやれば

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

となることがわかる。この関係式と共変微分演算の双線型性及びライプニッツの規則だけを知っておれば、共変微分の定義式は次のように分解して覚えることが出来る。

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^i \nabla_i Y \\ &= X^i \nabla_i (Y^k \partial_k) \\ &= X^i \left\{ (\nabla_i Y^k) \partial_k + Y^k (\nabla_i \partial_k) \right\} \\ &= X^i (\partial_i Y^k \partial_k + Y^k \Gamma_{ik}^l \partial_l) \end{aligned}$$

ただし、 $\nabla_{\partial/\partial u^i}$ を単に ∇_i 等と書いている。また関数に対しては形式的に $\nabla_X f = X(f)$ と約束する。このとき特に

$$\nabla_i Y = (\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) \partial_k$$

あるいはその成分をとって

$$\nabla_i Y^k = \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j$$

を得るが、これが物理やテンソル解析の教科書に登場する (反変ベクトルの) 共変微分の定義である。

6.4 線型接続

前節の最後に見た等式は、ベクトル場 Y の座標曲線 u^i に沿った共変微分が、成分 Y^k の u^i による通常の偏微分と (Y^j) の Γ_{ij}^k による線型変換 (i を固定した Γ_{ij}^k を変換行列とみている) の和として書ける事を示している。一方、関係式

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \quad (6.5)$$

は、その線型変換が基底ベクトル $\partial/\partial u^j$ の u^i に沿った方向への共変微分に由来することを示している。微分の意味を考えるとこれは、考えている点 p における座標基底 $(\partial/\partial u^j)(p)$ と、 P から曲線 u^i に沿って僅かに離れた点 q における座標基底 $(\partial/\partial u^j)(q)$ の間の関係が、近似的に行列 $\Gamma_i = (\Gamma_{ij}^k)_{kj}$ で与えられる事を示していると言える (後で触れるようにこの述べ方には注意が必要である)。ただしその変換は (一般には) 座標曲線の方向毎に異なっており、それらをまとめて表したものが記号 Γ_{ij}^k である。このことの意味をもう少し詳しく述べると次の通りである。点 p を通る曲線 $u = \varphi(t)$ (ただし点 p におけるその微分は $\eta = \eta^i \partial_i$ とする) のパラメータ表示を $\varphi(t) = (u_0^1 + \eta^1 t, \dots, u_0^n + \eta^n t)$ とし、基底ベクトル $\partial/\partial u^j$ の定めるベクトル場を曲線 $u = \varphi(t)$ 上でパラ

メータ表示したものを $(\partial/\partial u^j)(t)$ と書いてやることにする。点 p における座標基底と p から (η 方向に) $\eta\Delta t$ だけ隔たった点 q における座標基底との関係は

$$P_\varphi^{-1}(\Delta t) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}(\Delta t) \right) = \frac{\partial}{\partial u^j}(0) + \Delta t \eta^i \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}(0) + O(\Delta t^2)$$

で与えられる。あるいは同じ事であるが、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ P_\varphi^{-1}(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}(t) \right) - \frac{\partial}{\partial u^j}(0) \right\} = \eta^i \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}(0)$$

が成立すると言っても良い。ただし記号 $P_\varphi^{-1}(t)$ はある方法で、点 $\varphi(t)$ における接ベクトルを点 $\varphi(0)$ における接ベクトルに引き戻す操作を表している (詳しくは次々節で説明)。

[注] ここで、上式の左辺を ($P_\varphi^{-1}(t)$ を外して) $\lim_{t \rightarrow 0} (1/t) \{ \partial_j(t) - \partial_j(0) \}$ 等と書きたいところであるが、それは2重の意味に於いて出来ない。まず、一般の多様体上では異なる点における接空間は全く別物と考えるので異なる点における接ベクトルの間で和や差をとることは出来ない。一方、3次元空間内の2次元曲面を考えている場合にはベクトルを3次元空間内で平行移動して差をとることが出来るが、それを直接微分すれば4章で見たように一般には接平面に垂直な成分が現れてしまう。従って、その場合にもその表示は正しくない。これらの問題を解消するのが次節で述べる平行移動の概念である。上式における記号 P_φ^{-1} は、それを先取りして使ったものである。

このように (空間の各点における) n^3 個の実数の組 Γ_{ij}^k は任意の方向に微少に離れた2点における基底ベクトル同士の関係を与える量になっている。この基底ベクトル同士の関係は自然に隣接する二つの接空間の間関係 (線型変換) を与えるので、それは隣接する接ベクトル空間同士のつながり具合を与える量になっていると考えることも出来る。この意味で Γ_{ij}^k の事を (多様体 M の) 線型接続係数あるいは単に接続係数と呼ぶ。また Γ_{ij}^k により定められる隣接する接空間同士の関係を多様体 M 上の (より正確には多様体 M の接バンドル $T(M)$ に対する) 線型接続あるいは単に接続と呼ぶ。ただし、接空間同士の接続が局所座標の採り方に依らず意味を持つためには接続係数 Γ_{ij}^k は変換則

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^j} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\rho} + \frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\rho} \quad (6.6)$$

を満たさねばならない。

[証明] (6.5) 式における関係を別の局所座標 $\bar{u} = (\bar{u}^i)$ でみたものを考える。このとき座標基底に対し $\partial/\partial \bar{u}^i = (\partial u^\rho/\partial \bar{u}^i) \partial/\partial u^\rho$ である事に注意し、前節で見た共変微分の性質を用いると、

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j} &= \nabla_{\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j}} \left(\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial}{\partial u^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \bar{u}^\rho}{\partial u^\mu} \frac{\partial^2 u^\nu}{\partial \bar{u}^\rho \partial \bar{u}^j} \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^j} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} + \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^j} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right\} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \end{aligned}$$

を得る。これが (6.5) と等しくなる条件を求めると (6.6) 式を得る。□

一方逆に、上の変換則を満たす n^3 個の実数の組 Γ_{ij}^k が空間の各点に与えられたとすると、それを用いて隣接する点における接ベクトル空間同士の関係、すなわち多様体上の線型接続が定義される。このとき更に、任意のベクトル場 $X = X^i \partial/\partial u^i, Y = Y^j \partial/\partial u^j$ に対して

$$X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \quad (6.7)$$

とおくと、これは局所座標の採り方によらない一つのベクトル場を定める。このことを証明しておこう。

[証明] ベクトル場 X, Y を別の局所座標でみた成分 $\bar{X}^i \partial_i, \bar{Y}^j \partial_j$ と、(6.6) 式の変換則を満たす $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ からつくった

$$\bar{X}^i \left(\frac{\partial \bar{Y}^k}{\partial \bar{u}^i} + \bar{\Gamma}_{ij}^k \bar{Y}^j \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^k}$$

が (6.7) 式と一致することを示せばよい。ベクトルの成分の変換則と Γ の変換則を用いてこの式を書き換えると

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} X^\alpha \left\{ \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^\nu} \left(\frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\mu} Y^\mu \right) + \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^j} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\rho} + \frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\rho} \right) \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} Y^\beta \right\} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial}{\partial u^\tau} \\ &= X^\alpha \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^k} + \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \right) Y^\beta + \frac{\partial Y^\tau}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\tau Y^\beta \right\} \frac{\partial}{\partial u^\tau} \end{aligned}$$

を得る。従ってもし

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^k} + \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} = 0$$

が成立するならば与式は (6.7) 式に等しい。しかるに、この関係式は座標変換の関係式

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\nu} = \delta$$

の両辺を u^k で偏微分する事により容易に得られる (確認せよ)。よって (6.7) 式は局所座標の採り方によらずに一意的に決まるベクトル場を定める。□

このように、変換則 (6.6) を満たす n^3 個の量 (すなわち接続係数) Γ_{ij}^k が与えられると、ベクトル場 X, Y に対して、(6.7) 式を通して座標変換に対して不変な意味を持つ新たなベクトル場をつくる事が出来る。式のカタチよりこれを Y の X による共変微分と呼ぶのは自然である。そこで (6.7) 式で定義されるベクトル場を改めて $\nabla_X Y$ と書き、接続係数 Γ_{ij}^k から決まる共変微分と呼ぶ。こうして得られた $\nabla_X Y$ が 6.3 節でみた性質 (6.1) ~ (6.4) を満足することは明らかであるが、一方逆に次の定理が成立する。

[定理] $\mathfrak{X}(M)$ を多様体 M 上のベクトル場全体のつくる $C(M)$ 加群とする。このとき $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ から $\mathfrak{X}(M)$ への双線型写像 $K(X, Y)$ で $f \in C(M)$ に対し性質

$$\begin{aligned} K(fX, Y) &= fK(X, Y) \\ K(X, fY) &= (Xf)Y + fK(X, Y) \end{aligned}$$

を満足するものが与えられれば、それは M 上の線型接続と共変微分を定める。

[証明] 局所座標 $u = (u^i)$ をとって、 $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j$ と成分表示しておくとき K の性質より 6.3 節と同様に、

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= K(X^i \partial_i, Y^j \partial_j) \\ &= X^i K(\partial_i, Y^j \partial_j) \\ &= X^i \{ (\partial_i Y^j) \partial_j + K(\partial_i, \partial_j) \} \end{aligned}$$

を得る。定義より $K(\partial_i, \partial_j)$ は $\mathfrak{X}(M)$ の元であるから、これは局所座標 $u = (u^i)$ 上で

$$K(\partial_i, \partial_j) = K_{ij}^k \partial_k$$

と成分表示される。ここに K_{ij}^k は $C(M)$ の元、すなわち M 上の関数であるから、これは多様体 M の各点に於いて n^3 個の実数の組を定める。また、定義より $K(\partial_i, \partial_j)$ が各点で定めるベクトルは、別の局所座標を用いて書いても変わらないはずであるから、その為の条件を考察すれば K_{ij}^k が (6.6) 式と同様の変換則を満たす事もわかる。すなわち K_{ij}^k は接続係数である。そこでこれを改めて Γ_{ij}^k と書いて上式に戻してやれば、 $K(X, Y)$ が共変微分を与えていることがわかる。□

6.5 捩率テンソルと曲率テンソル

前節では共変微分に対する二つの新しい見方 (定義) を提供した。すなわち接続係数 Γ_{ij}^k に基づく定義と、 $C(M)$ 加群 $\mathfrak{X}(M)$ 上の (ある種の) 線型写像としての代数的定義である。この二つの定義はいずれも計量 g_{ij} の概念に依存していないことに注意しよう。従って多様体が必ずしも計量を持たない場合 (リーマン多様体でない場合) でもそこに (何らかの方法で) 接続の概念が与えられていれば、多様体上に共変微分概念が定義される。また、共変微分概念さえ定義されていれば (計量とは無関係に)、第 5 章で述べたのと同様にベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

で与えられるベクトル場 $R(X, Y)Z$ を対応させる写像

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$$

として曲率テンソルを定義することが出来る。ここで $[X, Y]$ はベクトル場 X, Y の括弧積と呼ばれるベクトル場であり、その定義は 5.1 節では

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

であった。しかしここでは、その定義を少し変えて、関数 $f \in C(M)$ に対する作用

$$[X, Y]f = Y(Xf) - X(Yf)$$

によりこれを定義する（その理由は先で明らかになるであろう）。

[問題] 括弧積の局所座標

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

を示せ。

[問題] 括弧積に関する次の性質を示せ。

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

$[X, Y]$ の双線型性

$$[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y] \quad , \quad [fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$$

上の問題で見たように、括弧積 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ は X, Y に関する双線型写であるがテンソル性は持たない。しかし

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

とおいた $T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ は、共変微分及び括弧積を非テンソルにする項同士が丁度打ち消し合ってテンソルになる（確認せよ）。これを接続 Γ に関する換率テンソルと呼ぶ。 $T(X, Y)$ の局所座標による成分表示を求めよう。それには T のテンソル性を利用して座標基底 $\{\partial_i\}$ に対する値 $T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j)$ を求めておけば十分である。まず括弧積に関する性質

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right] = 0$$

に注意する。ここで接続係数の定義 $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ を思い出せば、

$$T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j) = \nabla_i \partial_j - \nabla_j \partial_i - [\partial_i, \partial_j] = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k$$

より容易に

$$T(X, Y) = X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k$$

であることがわかる。この表示より、 $T(X, Y)$ が任意の X, Y に対して 0 になること（すなわち T がテンソル場として 0 であること）と $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ であることは同等であることがわかる。それ故、換率 0 という条件は接続係数 Γ_{ij}^k の i, j に関する対称性を保証するものである。そこで $T = 0$ という性質を持つ M 上の接続を対称な接続と呼ぶ。接続係数 Γ_{ij}^k がリーマン計量 g_{ij} から決まるクリストッフェル記号 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ に等しい場合、 g_{ij} の i, j に関する対称性から接続の対称性が自動的に従う（つまり換率 0）。しかしながら、一般の多様体上で接続係数を単に 6.4 節でみた変換則を満たす量として定義した場合にはその対称性は保証されない。

このように考えると、4.1 節でみた Γ_{ij}^k が（計量から決まる）クリストッフェル記号 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ に等しかったのは或る意味偶然ともいえる。とはいえ、4 章、5 章でみたように、共変微分が曲面の幾何学的性質を調べるのに有効であったのは、それが計量と密接に結びついていたからであった。従って、計量の与えられた多様体、すなわちリーマン多様体では、その接続係数は（計量から決まる）クリストッフェル記号によって与えられるのが普通である。この点については後の節で再び触れる。

[問題] 接続から決まる曲率テンソル $R(X, Y)Z$ の X, Y, Z に関する線型性及びテンソル性を確認せよ。（つまり R は $(1, 3)$ 型テンソルである。）

[問題] $R(\partial_i, \partial_j) = \nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i$

6.6 平行移動

前々節で導入した多様体上の接続は微妙に離れた2点における接空間同士の関係を与えるものであった。これを有限の間隔で隔たった2点の接空間の関係を与えるものに拡張するのが平行移動である。この概念の導入により、前節で見た接続という概念はより明確なものになるだろう。最初に準備として、ユークリッド空間の曲線座標でベクトルの平行性の概念を考察することから始める。

(x^i) をユークリッド空間におけるデカルト座標とし、 (u^i) を一般の曲線座標とする。ユークリッド空間における曲線 $\varphi(t)$ をデカルト座標で表したものを $(x^i(t))$ 、曲線座標で表したものを $(u^i(t))$ と書いておく。またユークリッド空間の全ての点（の接空間）に定ベクトル η を与えて、ベクトル場と考える。ベクトル場 η の成分をデカルト座標（に対応する座標基底）に関して成分表示したものは全ての点において同じ値 (η^i) をとる。これらのベクトルがユークリッド空間の通常の意味に於いてすべて平行なのは言うまでもないだろう。このベクトル場を、曲線座標 $u = (u^i)$ （に対応する座標基底）でみた場合の成分を (ξ^i) とすると $\eta^i \partial/\partial x^i = \xi^j \partial/\partial u^j$ でなければならない事より $\xi^j = (\partial u^j/\partial x^i) \eta^i$ であることがわかる。このベクトル場 $\xi = \xi^j \partial/\partial u^j$ を曲線 φ に沿って共変微分してやると

$$\nabla_{\varphi'} \xi = \frac{du^i}{dt} \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k \xi^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

が得られる。ただし、 Γ_{ij}^k は曲線座標 $u = (u^i)$ で計算したユークリッド空間の接続係数（クリストッフェル記号）である。前節で考察した共変微分の座標変換に対する共変性によれば、これは

$$\frac{dx^i}{dt} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}_{ij}^k \eta^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

とも書ける。ここで、 $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ はデカルト座標 $x = (x^j)$ で計算した接続係数（クリストッフェル記号）であるが、これは勿論空間の全ての点に於いて0である。また η^k が定数であることより、上式の値は空間の至る所で0である。よって、ユークリッド空間の各点に（ユークリッド空間での）平行移動により重ねることの出来るようなベクトルを配置して、それを任意の曲線に沿って共変微分したものは0であり、しかもそれは共変微分を計算する座標の採り方にはよらない。この事実をふまえて、一般の多様体における平行性の概念を次のように定義する。

[定義] ベクトル場 Y が、曲線 φ に沿って平行であるとは、 Y の φ に沿った共変微分が0になる場合をいう。

曲線 $u = \varphi(t) = (\varphi^i(t))$ 上にベクトル場 Y が与えられているとし、それを t を変数とする関数 $Y(t)$ の形に書いておこう。このとき、もし Y が φ に沿って平行であるなら、曲線上の各点で

$$\frac{dY^i}{dt} + \varphi^{k'} \Gamma_{kj}^i Y^j = 0$$

が成立せねばならない。（ただし、 $\varphi^{k'}$ は曲線 φ 微分 φ' の k 成分である。）これを、 Y^i に対する微分方程式と考えると、これは一階の線型常微分方程式であり、曲線 φ が定義されている範囲に於いて、任意の初期値 $Y(0) = \eta$ に対し一意的な解を持つ。そこで、その解を改めて $Y^i(t)$ と書き、 $Y(t) = Y^i(t) (\partial/\partial u^i)$ とおけば、その φ に沿う共変微分が0になることは明らかであろう（すなわち $Y(t)$ は φ に沿って平行である）。従って、多様体上の一点 P における接ベクトル η とその点を通る（滑らかな）曲線 φ が与えられていれば、 φ に沿って平行で、かつ点 P での値が η に等しいようなベクトル場 $Y(t)$ が必ず存在し、しかもそれは一意に決まるのである。このとき点 P でのベクトル $\eta = Y(0)$ に対して、曲線上の他の点でのベクトル $Y(t)$ を対応させる対応を曲線 φ に沿っての平行移動と呼ぶ。平行移動は点 $\varphi(0)$ における接ベクトルの全体すなわち接空間 $T_{\varphi(0)}(M)$ を曲線上の他の点 $\varphi(t)$ における接空間 $T_{\varphi(t)}(M)$ 全体に自然な方法で移す。これは二つのベクトル空間の間の線型な一対一対応（同型写像）を与える（それは線型常微分方程式の解空間に関する議論から導かれるがここでは省略する）。この線型写像のことも同様に曲線に沿っての平行移動と呼び、記号 $P_{\varphi}(t)$ で表わす。これは同型対応であったので逆写像を持つ。それを $P_{\varphi}^{-1}(t)$ で表しておくとも $P_{t,s} = P_{\varphi}(s) \circ P_{\varphi}^{-1}(t)$ により、曲線上の任意の点 $\varphi(t)$ から点 $\varphi(s)$ への平行移動が表現できる。このとき明らかに

$$P_{s,r} P_{t,s} = P_{t,r}$$

$$P_{s,t} = P_{t,s}^{-1}$$

が成立する。ここで定義した平行移動の概念を用いると、前節で見た基底ベクトルの共変微分（線型接続）の場合も含めて、ある点におけるベクトル η に沿った方向へのベクトル場 Y の共変微分を、次のカタチに書くことが出来る。

$$\nabla_{\eta} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ P_{\varphi}^{-1}(t) (Y(t)) - Y(0) \}$$

ただし φ は考えている点を $\varphi(0)$ とし、その点における微分が丁度 η に等しいような曲線で、 $P_\varphi^{-1}(t)Y(t)$ はその曲線に沿った平行移動で $Y(t)$ を (点 $\varphi(0)$ まで) 移したたものを表す。

[証明] 証明の方法は幾つか考えられるが、ここでは後の便宜を考えて、線型写像 $P_\varphi^{-1}(t)$ の表現行列を ($t=0$ の近傍で) 露骨に計算する事により証明する。考えている点 $\varphi(0)$ を含む局所座標を $u = (u)^i$ とし、この局所座標に関する成分表示で考える。接空間 $T_{\varphi(0)}(M)$ から接空間 $T_{\varphi(t)}(M)$ への平行移動 $P_\varphi(t)$ の表現行列の成分を $\{p_j^i(t)\}$ 、 $P_\varphi^{-1}(t)$ の表現行列の成分を $\{q_j^i(t)\}$ とすれば (その定義により)

$$P_\varphi(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\varphi(0)} \right) = p_j^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(t)}$$

及び

$$P_\varphi^{-1}(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\varphi(t)} \right) = q_j^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(0)}$$

である。特に $t=0$ においてこれらは $T_{\varphi(0)}(M)$ における恒等変換になるので、

$$p_j^i(0) = \delta_j^i, \quad q_j^i(0) = \delta_j^i$$

となる事に注意しておこう。平行移動の定義を思い出せば $p_j^i(t)$ は微分方程式

$$\frac{dp_j^k}{dt}(t) + \varphi^{\mu'}(t) \Gamma_{\mu\nu}^k(\varphi(t)) p_j^\nu(t) = 0$$

を満たすが、特に $t=0$ において

$$\frac{dp_j^k}{dt}(0) = -\eta^\mu \Gamma_{\mu j}^k(\varphi(0))$$

と書ける ($p_j^i(0) = \delta_j^i, \varphi(0) = \eta$ である事に注意)。一方 $P_\varphi^{-1}(t)$ は $P_\varphi(t)$ の逆写像なので、

$$p_k^i(t) q_j^k(t) = \delta_j^i$$

が常に成立しているが、これを t で微分して $t=0$ とおけば

$$\frac{dp_j^k}{dt}(0) + \frac{dq_j^k}{dt}(0) = 0$$

を得る。よって

$$\frac{dq_j^k}{dt}(0) = \eta^\mu \Gamma_{\mu j}^k(\varphi(0))$$

であることがわかる。(これが $P_\varphi^{-1}(t)$ の $t=0$ の近傍での振る舞いを与える関係式である。) そこで、 $Y = Y^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(t)}$ に対して、

$$\begin{aligned} P_\varphi^{-1}(t)(Y(t)) &= P_\varphi^{-1}(t) \left(Y^j(t) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\varphi(t)} \right) \\ &= Y^j(t) q_j^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(0)} \end{aligned}$$

とにおいて、接空間 $T_{\varphi(0)}(M)$ において次の極限計算を行う事が出来る。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ P_\varphi^{-1}(t)Y(t) - Y(0) \} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ Y^j(t) q_j^i(t) - Y^j(0) \} \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ [Y^j(t) q_j^i(t) - Y^j(0) q_j^i(t)] + [Y^j(0) q_j^i(t) - Y^j(0) q_j^i(t)] \} \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(0)} \\ &= \left\{ \frac{dY^j}{dt} q_j^i(0) + Y^j(0) \frac{dq_j^i}{dt}(0) \right\} \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(0)} \\ &= \left(\frac{dY^i}{dt}(0) + \eta^\mu \Gamma_{\mu j}^i(0) Y^j(0) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(0)} \end{aligned}$$

これは点 $\varphi(0)$ における共変微分の定義式である。よって主張は証明された。□

この様に曲線に沿ってベクトルを平行移動させて考えれば、共変微分は普通の微分と同じように書けることがわかる。これが一般の多様体における共変微分に幾何学的意味づけを与える。またこの証明の過程で、平行移動 $P_\varphi(t)$ 及び $P_\varphi^{-1}(t)$ (の表現行列の成分) が $t=0$ の近傍で近似的に

$$p_j^i(\Delta t) \simeq \delta_j^i - \Delta t \eta^\mu \Gamma_{\mu j}^i, \quad q_j^i(\Delta t) \simeq \delta_j^i + \Delta t \eta^\mu \Gamma_{\mu j}^i$$

と表されることもわかった。これが前節で述べた接続係数が与える隣接する接空間の関数の意味であり、またその証明でもある。

[曲率テンソルの意味と平行移動] 多様体上の平行移動に関して、必ず「曲線に沿って」との修辭が着くことは重要である。というのは、一般の多様体においては或る点におけるベクトルを他の点に平行移動した結果は、平行移動を行った経路(曲線)に依存するからである。その具体例はもう少し後で与えるが、実は次の事実が成立する。

点 P におけるベクトル $\xi = \xi^l \partial_l$ を最初に座標曲線 u^i に沿って微少に Δu^i だけ平行移動し、次に座標曲線 u^j に沿って微少に Δu^j だけ平行移動して得られるベクトルを ξ_{ij} とする。一方、 ξ を最初に座標曲線 u^j に沿って平行移動させ、次に u^i に沿って平行移動させることにより同じ点まで平行移動させたものを ξ_{ji} と書いておこう。このとき

$$\begin{aligned} \xi_{ji} - \xi_{ij} &= \xi^k R_{kij}^l \xi \Delta u^i \Delta u^j \partial_l + \text{微少量の3次以上の項} \\ &= R(\partial_i, \partial_j) \xi \Delta u^i \Delta u^j + \text{微少量の3次以上の項} \end{aligned}$$

が成立する(問:これを示せ)。つまり、或る点の近傍で接ベクトルを微少に平行移動させた場合の経路による違いは曲率テンソルにより表す事が出来る。

[測地線と正規座標系] この節で述べた平行性の概念は測地線の概念に一つの新しい見方を提供する。実際 4.2 節で与えた測地線の方程式をみると、測地線を表す曲線 $u(t)$ の各点における微分(つまり測地線自身の接ベクトル du/dt) が自分自身に沿って平行である、という条件を表す式になっていることがわかる。この事実から、必ずしも計量概念を持たない多様体における測地線を、その接ベクトル(微分が)自身に沿って平行であるような曲線として定義できることがわかる。

6.7 テンソル場の共変微分

前節で定義した平行移動の概念を用いると、共変微分を一般のテンソル場に容易に拡張することが出来る。その前にベクトル空間の間の写像について少し復習しておく。

V を n 次元(実)ベクトル空間、 V^* をその双対空間、 W を m 次元ベクトル空間、 W^* をその双対空間とする。(注: この設定の特別の場合として V と W の次元が同じである場合が含まれる。またその特別の場合として、 V と W が同じ空間である場合が含まれる。) $\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の基底、 $\{e^i\}_{i=1}^n$ をその双対基底とし、 $\{f_j\}_{j=1}^m$ を W の基底、 $\{f^j\}_{j=1}^m$ をその双対基底とする。また、 V^*, W^* により V 及び W の双対空間を表す。 φ をベクトル空間 V から W への線型写像としよう。線型写像 φ は基底 e_i に対する値 $\varphi_i = \varphi(e_i)$ がわかれば完全に決定される。 φ_i を W の基底 $\{f_j\}$ を用いて表したものを

$$\varphi_i = \varphi_i^j f_j$$

と書いておけば、 V の任意の元 $x = x^i e_i$ に対する φ の値は

$$\varphi(x) = \varphi(x^i e_i) = x^i \varphi(e_i) = x^i \varphi_i = x^i \varphi_i^j f_j = (\varphi_i^j x^i) f_j$$

と書ける。こうして決まる W の元を y とし、その成分を y^j と書いておけば、成分間の関係式として

$$y^j = \varphi_i^j x^i$$

を得る。さて、 W と W^* の双対性を表す内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ と書いておくと、任意の W^* の元 $\xi = \xi_j f^j$ に対し

$$\begin{aligned} \langle \xi, y \rangle_W &= \xi_j y^j \\ &= \xi_j (\varphi_i^j x^i) \\ &= (\varphi_i^j \xi_j) x^i \end{aligned}$$

が成立する。そこで ξ を一つ選んで固定しておき、この関係を用いて

$$\psi_\xi(x) = \langle \xi, \varphi(x) \rangle_W = (\varphi_j^i \xi_j) x^i$$

とおいてやる。このとき ψ_ξ はベクトル空間 V から実数体 R への線型写像になる(問:これを示せ)。つまり ψ_ξ は V 上の線型汎関数である。そう思って上の式を眺め直すと(あるいは ψ_ξ を V^* の基底 $\{e^j\}$ を用いて $\psi = \psi^j e^j$ と書いておいて上の定義式の x に e_j を代入すると) ψ_ξ は

$$\psi_j = \varphi_j^i \xi_i$$

を成分に持つ V^* の元であることがわかる。ここで $\xi \in W^*$ を色々動かしてやるとそれに応じて V^* の元 ψ_ξ が決まる。そこでその対応を $\psi(\xi)$ と書き直すと、 ψ は W^* から V^* への線型写像であって、その実態は φ_j^i が与えていることがわかる(問: ψ の線型性を確認せよ)。このとき \langle, \rangle_V により V と V^* の双対性を表す内積を表せば

$$\langle \psi, x \rangle_V = \psi_j x^j = (\varphi_j^i \xi_i) x^j$$

であるから

$$\langle \psi(\xi), x \rangle_V = \langle \psi, x \rangle_V = \langle \xi, y \rangle_W = \langle \xi, \varphi(x) \rangle_W$$

が成立する。以上のことをまとめると、 V から W への線型写像 φ が与えられると、それは同時に W^* から V^* への線型写像 ψ を与え上の関係式が成立する。この ψ を φ に随伴する(あるいは共役な) W^* から V^* への線型写像と呼び φ^* で表す。

[問題] V, W の元を縦ベクトルの形に書いたときの φ の表現行列を Φ とする。 W^*, V^* の元を横ベクトルの形に書いたときの φ^* の表現行列は Φ 、 W^*, V^* の元を縦ベクトルの形に書いたときの φ^* の表現行列は Φ' (Φ の転置行列) である。

以下では V と W の次元は同じ n で、 φ は逆写像 φ^{-1} を持つとする。 $\varphi: V \rightarrow W$ が与えられたとき自然にその随伴写像 $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$ が決まり、従ってその逆写像 φ^{*-1} が決まる。これらの写像はすべてその基底に対する値 $\varphi_i = \varphi(e_i), \varphi^{*-1}(e^j)$ 等によって特徴づけられるからテンソル空間 $T_s^r(V)$ から $T_s^r(W)$ への写像は基底 $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$ の写像 $\varphi(e_{i_1}) \otimes \dots \otimes \varphi(e_{i_r}) \otimes \varphi^{*-1}(e^{j_1}) \otimes \dots \otimes \varphi^{*-1}(e^{j_s})$ を $T_s^r(V)$ 全体に線型に拡張する事で自然に得られる。この φ から誘導されるテンソル空間の間の写像を $\tilde{\varphi}$ で表すことにする。 φ^{*-1} を簡単のため ψ で書いておくと (r, s) 型テンソル $\tau = \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$ の $\tilde{\varphi}$ による像 $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_s}$ に対して、その成分の関係

$$\tilde{\tau}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \varphi_{\mu_1}^{j_1} \dots \varphi_{\mu_r}^{j_r} \psi_{j_1}^{i_1} \dots \psi_{j_s}^{i_s} \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

が成り立つ。

[問題] これを示せ。また ψ_j^i と φ_j^i の関係を求めよ。

以上の一般論を前節で見た多様体上の曲線 φ に沿った平行移動に当てはめると、接空間 $T_{\varphi(0)}(M)$ と $T_{\varphi(t)}(M)$ の間の平行移動 $P_\varphi(t)$ 及び $P_\varphi^{-1}(t)$ に随伴して、余接空間 $T_{\varphi(t)}^*(M)$ と $T_{\varphi(0)}^*(M)$ の間の線型写像(平行移動) $P_\varphi^*(t)$ 及び $P_\varphi^{*-1}(t)$ が自然に決まる。これらはテンソル空間 $T_s^r(T_{\varphi(0)})$ と $T_s^r(T_{\varphi(t)})$ の間の平行移動 $\tilde{P}_\varphi(t)$ 及びその逆写像 $\tilde{P}_\varphi^{-1}(t)$ を自然に誘導する。そこでこのテンソル場に対する平行移動 $\tilde{P}_\varphi(t)$ を用いてテンソル場 τ の共変微分を

$$\nabla_{\varphi'} \tau = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \tilde{P}_\varphi^{-1}(t) \tau(t) - \tau(0) \}$$

により定義する。このとき共変微分の成分について

$$\nabla_\lambda \tau_{v_1 \dots v_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} = \frac{\partial \tau_{v_1 \dots v_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial u^\lambda} + \sum_{i=1}^r \Gamma_{\lambda \kappa}^{\mu_i} \tau_{j_1 \dots j_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} - \sum_{j=1}^s \Gamma_{\lambda v_j}^{\kappa} \tau_{v_1 \dots v_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}$$

が成立する。なお、この右辺をテンソル解析では簡単のためしばしば $\tau_{v_1 \dots v_s; \lambda}^{\mu_1 \dots \mu_r}$ と略記する。

[証明] 簡単のため、二階共変テンソルの場合に証明する。 τ を二階共変テンソルとすると、それは局所座標 $u = (u^i)$ により $\tau = \tau_{ij} du^i \otimes du^j$ と表示される。 φ を(考えている点から出発する)座標曲線 u^λ に沿った曲線とする。このとき $\varphi'(0)$ は第 λ 成分のみが 1 となるような点 $\varphi(0)$ における接ベクトルである。 τ を曲線 φ 上で見たものを $\tau(t)$ と書いておく。6.5 節の結果と上でみた随伴写像の定義に従えば、 φ に沿った余接空間 $T_{\varphi(t)}^*(M)$ から $T_{\varphi(0)}^*(M)$ への平行移動は $P_\varphi^*(t)$ で与えられ、その成分 $p_j^i(t)$ は

$$\frac{dp_j^i}{dt}(0) = -\Gamma_{\lambda j}^i(\varphi(0))$$

を満足する。よってこの場合 \tilde{P}_φ^{-1} の具体的な作用は

$$\begin{aligned}\tilde{P}_\varphi^{-1}(t)\tau(t) &= \tau_{ij}(t)(p_\mu^i(t)du^\mu|_{\varphi(0)}) \otimes (p_\nu^j(t)du^\nu|_{\varphi(0)}) \\ &= \tau_{ij}(t)p_\mu^i(t)p_\nu^j(t)du^\mu(0) \otimes du^\nu(0)\end{aligned}$$

となる。ただし $T_{\varphi(0)}^*(M)$ における基底を $\{du^i(0)\}$ で表している。よって、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \tilde{P}_\varphi^{-1}(t)\tau(t) - \tau(0) \} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ p_\mu^i(t)p_\nu^j(t)\tau_{\mu\nu}(t) - \tau_{ij}(0) \} du^i(0) \otimes du^j(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ p_\mu^i(t)p_\nu^j(t)\tau_{\mu\nu}(t) - p_\mu^i(0)p_\nu^j(0)\tau_{\mu\nu}(0) \} du^i(0) \otimes du^j(0)\end{aligned}$$

であるが、この成分の極限に注目すると、通常の積の微分公式を証明する場合と同様の技巧を使って

$$\begin{aligned}& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ p_\mu^i(t)p_\nu^j(t)\tau_{\mu\nu}(t) - p_\mu^i(0)p_\nu^j(0)\tau_{\mu\nu}(0) \} \\ &= \frac{dp_\mu^i}{dt}(0)p_\nu^j(0)\tau_{\mu\nu}(0) + p_\mu^i(0)\frac{dp_\nu^j}{dt}(0)\tau_{\mu\nu}(0) + p_\mu^i(0)p_\nu^j(0)\frac{d\tau_{\mu\nu}}{dt}(0) \\ &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial u^\lambda} - \Gamma_{\lambda i}^\kappa \tau_{\kappa j} - \Gamma_{\lambda j}^\kappa \tau_{i \kappa}\end{aligned}$$

が示される。この議論では、テンソル場の成分の変換が（移った先での）自分自身と変換関数 p_j^i （あるいは q_j^i ）の必要な階数だけの積の形に書けることが本質的であり後は通常の積の微分公式に従っているだけである。このことに気づけば、一般の場合の証明も容易である。□

この結果を敷衍すると、階数 0 のテンソル場、すなわちスカラー場（つまり関数） f に対する共変微分の λ 成分は単なる偏微分 $\partial \tau f / \partial u^i$ であると考えるのが妥当である。（そう定義すれば上のルールを満足する。）ただしそれは ∇_{∂_i} を考えただけであるから、一般のベクトル場 $X = X^i \partial_i$ に対しては $\nabla_{X^i \partial_i} = X^i \nabla_{\partial_i}$ より

$$\nabla_X f = X^i \frac{\partial f}{\partial u^i} = X(f)$$

と定義するべきであることがわかる。（6.3 節の注釈はここで正当化される。）

次に、応用上よく現れる $(1, s)$ 型テンソル場の共変微分についてもう少し別の見方を与えておこう。

[定理] τ を $(1, s)$ 型テンソル場（ただし $s \geq 1$ ）、 X をベクトル場とするとき τ の X による共変微分 $\nabla_X \tau$ に関し、次の公式が成立する。

$$(\nabla_X \tau)(X_1, \dots, X_s) = \nabla_X(\tau(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{k=1}^s \tau(X_1, \dots, \nabla_X X_k, \dots, X_s)$$

これは X を固定したとき $(1, s)$ 型のテンソル場を定めるが、

$$\sigma(X, X_1, \dots, X_s) = (\nabla_X \tau)(X_1, \dots, X_s)$$

とおけば、 σ は $(1, s+1)$ 型テンソル場を定める。

[証明] τ を局所座標を用いて

$$\tau = \tau_{i_1 \dots i_s} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_s}$$

と表しておく。最初に σ が $(1, s+1)$ 型テンソル場であることを示そう。 σ の線型性は容易にわかるので、そのテンソル性を示す。 $f \in C(M)$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma(X, X_1, \dots, fX_r, \dots, X_s) &= \nabla_X(\tau(X_1, \dots, fX_r, \dots, X_s)) - \tau(X_1, \dots, \nabla_X(fX_r), \dots, X_s) - \sum_{k \neq r} \tau(X_1, \dots, fX_r, \dots, \nabla_X X_k, \dots, X_s) \\ &= \nabla_X(f\tau) - \tau(X_1, \dots, (Xf)X_r + f\nabla_X(X_r), \dots, X_s) - f \sum_{k \neq r} \tau(X_1, \dots, \nabla_X X_k, \dots, X_s) \\ &= (Xf)\tau + f\nabla_X(\tau(X_1, \dots, X_s)) - (Xf)\tau - f \sum_{k=1}^s \tau(X_1, \dots, \nabla_X X_k, \dots, X_s) \\ &= f\nabla_X(\tau(X_1, \dots, X_s)) - f \sum_{k=1}^s \tau(X_1, \dots, \nabla_X X_k, \dots, X_s) = f\sigma(X, X_1, \dots, X_s)\end{aligned}$$

同様に

$$\sigma(fX, X_1, \dots, X_s) = (\nabla_{fX} \tau)(X_1, \dots, X_s) = f\sigma(X, X_1, \dots, X_s)$$

が成立するので、確かに σ は $(1, s+1)$ 型テンソル場である。よって局所座標で

$$\nabla_X \tau = \sigma = \sigma_{i_1 \dots i_s}^m \partial_m \otimes du^1 \otimes \dots \otimes du^s$$

と書ける。そこで $X = \partial_l, X_k = \partial_{i_k}$ として $(\nabla_X \tau)(X_1, \dots, X_s)$ に入れてやると、

$$\begin{aligned} (\nabla_{\partial_l} \tau)(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}) &= \nabla_l(\tau_{i_1 \dots i_s}^m \partial_m) - \sum_{k=1}^s \tau(\partial_{i_1}, \dots, \nabla_l \partial_{i_k}, \dots, \partial_{i_s}) \\ &= (\partial_l \tau_{i_1 \dots i_s}^m) \partial_m + \tau_{i_1 \dots i_s}^m \Gamma_{lm}^\mu \partial_\mu - \sum_{k=1}^s \Gamma_{li_k}^\mu \tau_{i_1 \dots \mu \dots i_s}^m \partial_m \end{aligned}$$

よって

$$\sigma_{i_1 \dots i_s}^m = \partial_l \tau_{i_1 \dots i_s}^m + \Gamma_{lp}^\mu \tau_{i_1 \dots i_s}^p - \sum_{k=1}^s \Gamma_{li_k}^\mu \tau_{i_1 \dots \mu \dots i_s}^m$$

すなわち

$$\sigma_{i_1 \dots i_s}^m = \tau_{i_1 \dots i_s, l}^m$$

であり、先に示した定理より確かに σ は τ の共変微分である。□

この結果は共変微分、あるいは接続という概念に対する更なる新しい見方を提供する。実際上の結果をまとめると、ここで定義した新しいテンソル場 σ を $\nabla \tau$ と書いてやり

$$\nabla : \tau \longmapsto \sigma = \nabla \tau$$

という写像を考えれば、それは $(1, s)$ 型テンソル場 τ に対し、 $(1, s+1)$ 型テンソル場 $\nabla \tau$ を与える（ある特徴的な性質を持つ）写像になっており、この $\nabla \tau$ とベクトル場 X から縮約

$$\langle X, \nabla \tau \rangle$$

により定義される $(1, s)$ 型テンソル場が共変微分 $\nabla_X \tau$ を与えるという構造になっている。そこでこの写像 ∇ のことを接続と見なしてやれば、（構成的方法を用いずに）いきなりテンソル場の接続と共変微分の定義を書き下すことが可能になるのであるが、それについてはまた別の機会に述べることにして、ここでは先を急ぐことにしよう。

6.8 リーマン計量と接続

この章のこれまでの部分（6.1節～6.7節）では、計量の性質は何も使っていない。従って、ここまでの結果は計量を持つとは限らない一般の多様体上に与えられた接続（及びそれから導かれる共変微分）について成り立つ。この節では多様体 M がリーマン計量を持つ場合（すなわちリーマン多様体である場合）を考える。

リーマン多様体 M において、その計量 g_{ij} から決まるクリストッフェル記号 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ を Γ_{ij}^k とみなせば M 上の接続が得られる。このリーマン計量から決まる M 上の接続のことを特にリーマン接続と呼んでおく。 M 上の曲線 φ に沿う（リーマン接続から決まる）平行移動をこれまで同様、 $P_\varphi(t)$ で表そう。このとき

$$g_{\varphi(t)}(P_\varphi(t)\eta, P_\varphi(t)\xi) = g_{\varphi(0)}(\eta, \xi)$$

が成り立つ。ただし η, ξ は M の点 $\varphi(0)$ における接ベクトル（すなわち接空間 $T_{\varphi(0)}(M)$ の元）である。

[証明] $X(t) = P_\varphi(t)\eta, Y(t) = P_\varphi(t)\xi$ とおけば、 X, Y はそれぞれ曲線 φ 上で定義されたベクトル場になる。それらが、 φ に沿って平行であることより、

$$\begin{aligned} \frac{dX^k}{dt} + \zeta^i \Gamma_{ij}^k X^j &= 0 \\ \frac{dY^k}{dt} + \zeta^i \Gamma_{ij}^k Y^j &= 0 \end{aligned}$$

が成立することに注意しておこう(ただし、 $\zeta = d\varphi/dt$)。曲線 φ 上の各点における内積 $g(t)(X(t), Y(t))$ の値を $f(t)$ とおけば $f(t)$ は曲線 φ 上の関数である。従つてもし $df/dt = 0$ であれば曲線上の至る所で上の内積の値は等しく、主張は証明されたことになる。そこで $df/dt = 0$ を示そう。局所座標をとつて上の内積を表示すると

$$f(t) = g_{ij}(t)X^i(t)Y^j(t)$$

よつて

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{dg_{ij}}{dt}X^iY^j + g_{ij}\frac{dX^i}{dt}Y^j + g_{ij}X^i\frac{dY^j}{dt} \\ &= \zeta^\mu \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\mu}X^iY^j + g_{ij} \left\{ \frac{dX^i}{dt}Y^j + X^i\frac{dY^j}{dt} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで X, Y の満たす微分方程式を思い出すと

$$\begin{aligned} g_{ij} \left\{ \frac{dX^i}{dt}Y^j + X^i\frac{dY^j}{dt} \right\} &= -g_{ij} \left\{ (\zeta^\mu \Gamma_{\mu\nu}^i X^\nu)Y^j + X^i(\zeta^\mu \Gamma_{\mu\nu}^j Y^\nu) \right\} \\ &= -\zeta^\mu \left\{ g_{ij}\Gamma_{\mu\nu}^i X^\nu Y^j + g_{ij}\Gamma_{\mu\nu}^j X^i Y^\nu \right\} \\ &= -\zeta^\mu \left\{ g_{\rho j}\Gamma_{\mu i}^\rho X^i Y^j + g_{i\rho}\Gamma_{\mu j}^\rho X^i Y^j \right\} \\ &= -\zeta^\mu \left\{ g_{\rho j}\Gamma_{\mu i}^\rho + g_{i\rho}\Gamma_{\mu j}^\rho \right\} X^i Y^j \end{aligned}$$

を得る。ここでは接続係数 Γ_{ij}^k がクリストッフエル記号 $\{ij\}^k$ に等しいこと、及び 4.1 節での議論を思い出すと、ここに現れる $g_{k\rho}\Gamma_{ij}^\rho$ は第一種クリストッフエル記号

$$[k, ij] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u^j}g_{ik} - \frac{\partial}{\partial u^k}g_{ij} \right\}$$

に等しい。それ故 g_{ij} の i, j に対する対称性と 4.1 節の議論を思い出せば、

$$g_{\rho j}\Gamma_{\mu i}^\rho + g_{i\rho}\Gamma_{\mu j}^\rho = [j, \mu i] + [i, \mu j] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\mu}$$

であることがわかる。これらを元の式に戻してやると

$$\frac{df}{dt} = \zeta^\mu \left\{ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\mu} \right\} X^i Y^j = 0$$

が得られる。よつて主張は証明された。□

[系:1] X, Y をリーマン多様体 M の曲線 φ 上で定義された任意のベクトル場とする。このとき次の公式が成立する。

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = g(\nabla_{\varphi'}X, Y) + g(X, \nabla_{\varphi'}Y)$$

ただし共変微分 ∇ は、 M のリーマン計量 g から決まる接続に基づくものとする。

[証明] 曲線 φ に沿つた平行移動を $P_\varphi(t)$ で表す。このとき平行移動が内積を保つことより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(X, Y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ g_{\varphi(t)}(X(t), Y(t)) - g_{\varphi(0)}(X(0), Y(0)) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ g_{\varphi(0)}(P_\varphi^{-1}(t)X(t), P_\varphi^{-1}(t)Y(t)) - g_{\varphi(0)}(X(0), Y(0)) \right\} \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} &g_{\varphi(0)}(P_\varphi^{-1}(t)X(t), P_\varphi^{-1}(t)Y(t)) - g_{\varphi(0)}(X(0), Y(0)) \\ &= \{g_{\varphi(0)}(P_\varphi^{-1}(t)X(t), P_\varphi^{-1}(t)Y(t)) - g_{\varphi(0)}(X(0), P_\varphi^{-1}(t)Y(t))\} + \{g_{\varphi(0)}(X(0), P_\varphi^{-1}(t)Y(t)) - g_{\varphi(0)}(X(0), Y(0))\} \end{aligned}$$

と分解し、内積 g の連続性に注意して内積と極限操作の順序を入れ替えてやると求めるべき式が得られる。□

[系:2] リーマン多様体 M の任意のベクトル場 X, Y と、点 $p \in M$ における接ベクトル ξ に対し

$$\xi g(X, Y) = g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y)$$

が成り立つ。(証明は上の系:1 より直ちに得られる。)

上の定理とは逆に次のことが言える。

[定理] 多様体 M 上にリーマン計量 g が与えられているとする。このとき多様体 M 上の接続で次の二つの条件を満たすものがただ一つ存在する。

- (i) M 上の任意の曲線 φ に対し、 φ に沿う $T_{\varphi(0)}(M)$ から $T_{\varphi(t)}(M)$ への平行移動は、内積を不変に保つ。
- (ii) 任意のベクトル場 $X, Y \in C(M)$ に対し $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$ (捩率零)

[証明] まず上の条件を満たす接続が存在したとしよう。それから決まる平行移動は内積を不変に保つので、上の定理の [系:2] より、共変微分 ∇ に関し、

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = g(\nabla_\mu \partial_\nu, \partial_\lambda) + g(\partial_\nu, \nabla_\mu \partial_\lambda)$$

が得られる。接続の対称性 $\nabla_i \partial_j = \nabla_j \partial_i$ に注意し、 μ, ν, λ の順序を入れ替え得た式をつくって、 $g(\nabla_\mu \partial_\nu, \partial_\lambda)$, $g(\nabla_\nu \partial_\lambda, \partial_\mu)$, $g(\nabla_\lambda \partial_\mu, \partial_\nu)$ に対する三つの一次方程式を得る。これを解くことにより容易に

$$g(\nabla_\mu \partial_\nu, \partial_\lambda) = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

を得る。この式の左辺は $\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\kappa$ より $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\lambda}$ に等しい。よって $g_{\rho\lambda}$ の逆行列である $g^{\rho\lambda}$ を用いると

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

が得られる。(ここまでの計算は 4.1 節のものと同質的である。ただし 4.1 節では 3 次元ユークリッド空間内の内積に基づいた計算であった。) こうして接続係数が一意に決まることが示された。一方、接続の存在を言うには、計量から上式右辺で決まる量を Γ_{ij}^k とおいて、それが 6.4 節 (6.6) 式の変換則を満たすことを言えば良い。それは g_{ij} の変換則から従う。こうして決めた接続が対称であることは明らかであろう。性質 (i) については、この節の最初の定理に戻れば良い。□

以上の結果は、リーマン多様体上のリーマン接続が、平行移動の等長性及び対称性という二つの性質により完全に特徴づけられることを示している。これらの条件から決まる一意に決まるリーマン多様体 M 上の接続を、レビ・チビタ接続と呼ぶことがある。通常、リーマン多様体での平行移動や共変微分、曲率テンソルと云えばこのレビ・チビタ接続 (リーマン接続) から決まるものを指す。

リーマン接続から導かれる平行移動の性質を使えば、リーマン多様体上の平行移動をより直感的に理解することができる。特に測地線はその接ベクトル (微分) が自身に沿って平行であるという性質を持っているので、測地線に沿ってあるベクトルを平行移動するには、そのベクトルと測地線 (の接線) のなす角が一定に保たれるように移動させれば良いことがわかる。

[問題] 球面上の測地線がいわゆる大円 (の一部) になることは良く知られている。この事実を利用して、2 次元球面の北極におけるある接ベクトルを複数のコースで赤道上に平行移動させた場合の結果について議論せよ。

最後にリーマン計量とそこから導かれるリーマン接続に関して成立する重要な等式を示しておこう。これは次に述べるビアンキの恒等式と共に次章で活用する。

$$\nabla_{\partial_k} g_{ij} = 0$$

[証明] [定理:1] の [系:2] より

$$\partial_k g_{ij} = g(\nabla_k \partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_k \partial_j)$$

である。 $\nabla_k \partial_i = \Gamma_{ki}^\mu \partial_\mu$ を思いだし $g(\nabla_k \partial_i, \partial_j) = g(\Gamma_{ki}^\mu \partial_\mu, \partial_j) = \Gamma_{ki}^\mu g_{\mu j}$ 等に注意して上式右辺を左辺に移項すれば

$$\partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^\mu g_{\mu j} - \Gamma_{kj}^\mu g_{i\mu} = 0$$

を得る。6.6 節の結果を思い出せば、この左辺は $\nabla_k g_{ij}$ に他ならない。よって主張は示された。□

6.9 ピアンキの恒等式

少々退屈かもしれないが、次章で必要となるピアンキの恒等式を証明しておく。ただしここでは簡単のため換率 0 の場合について述べる（このとき括弧積の定義は $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ と思って良い）。最初にヤコビの恒等式と呼ばれるものを示す。

[ヤコビの恒等式] ベクトル場の括弧積 $[,]$ について次のヤコビの恒等式が成り立つ。

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

[証明] 上式の左辺を $B(X, Y, Z)$ とおく。これが X, Y, Z に関して線型性を持つことはすぐに確かめられる。次に関数 f に対して

$$B(fX, Y, Z) = fB(X, Y, Z)$$

が成立することを示そう。6.5 節でみた括弧積の性質に注意して

$$[[fX, Y], Z] = [f[X, Y] - (Yf)X, Z] = f[[X, Y], Z] - (Zf)[X, Y] - (Yf)[X, Y] + (ZYf)X$$

同様に

$$[[Z, fX], Y] = [(Zf)X + f[Z, X], Y] = (Zf)[X, Y] - (YZf)X + f[[Z, X], Y] - (Yf)[Z, X]$$

更に

$$[[Y, Z], fX] = [Y, Z]f + f[[Y, Z], X]$$

を得る。括弧積の性質に注意しながらこれら三つの式を加えると、求めるべき関係式が得られる。全く同様にして

$$B(X, fY, Z) = fB(X, Y, Z) \quad , \quad B(X, Y, fZ) = fB(X, Y, Z)$$

も示せる。以上の関係式より $B(X, Y, Z)$ のテンソル性がわかるので

$$B(X, Y, Z) = X^i Y^j Z^k B(\partial_i, \partial_j, \partial_k)$$

がいえる。ここで括弧積の性質 (6.5) を思い出すと、座標基底に対する B の値は 0 である。よって任意のベクトル場 X, Y, Z に対して $B(X, Y, X) = 0$ 。すなわちヤコビの恒等式が示された。

[問題] ヤコビの恒等式を直接計算により示せ。

[ピアンキの第一恒等式] リーマンの曲率テンソルはピアンキの恒等式と呼ばれる、二つの関係式を満たしている。これらは、先に述べたヤコビの恒等式に起因するものである。最初のものは

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

と書かれる。

[証明] 括弧積 $[X, Y]$ の定義より $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$, $\nabla_Y Z = \nabla_Z Y + [Y, Z]$, $\nabla_Z X = \nabla_X Z + [Z, X]$ 等を得る。これらを用いて曲率テンソルの定義式を書き換えてやると、

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z + [Y, Z]) - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

同様に

$$R(Y, Z)X = \nabla_Y(\nabla_Z X + [Z, X]) - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X$$

$$R(Z, X)Y = \nabla_Z(\nabla_X Y + [X, Y]) - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y$$

を得る。これら三つの式を加え合わせると

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \nabla_X[Y, Z] + \nabla_Y[Z, X] + \nabla_Z[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_{[Y, Z]}X - \nabla_{[Z, X]}Y$$

を得るが、この右辺を整理すればヤコビの恒等式（の符号を変えたもの）に等しい。よって恒等的に零である。

[問題] これを成分で書いて $R^h_{ijk} + R^h_{jki} + R^h_{kij} = 0$

[ピアンキの第二恒等式] 6.7 節の最後の定理に従い、(1,3) 型テンソル場である曲率テンソル R のベクトル場 Z による共変微分 $\nabla_Z R$ をベクトル場 X, Y, W に対し

$$(\nabla_Z R)(X, Y, W) = \nabla_Z(R(X, Y)W) - R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X, Y)\nabla_Z W$$

で定義する。これは Z を固定し X, Y, Z の関数とみれば (1,3) 型のテンソル場であるが、 Z, X, Y, W の関数とみた場合には (1.4) 型のテンソル場でもある。このとき

$$(\nabla_Z R)(X, Y, W) + (\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) = 0$$

が成立する。

[証明] 最初に、共変微分の演算子としての交換子を括弧積と同じ記号で

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$$

と定義しておく。この演算子の括弧積 (交換子) についてヤコビの恒等式と同様の関係式

$$[\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]] + [\nabla_Y, [\nabla_Z, \nabla_X]] + [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]] = 0$$

が成立する (証明は容易)。これを演算子に関するヤコビの恒等式と呼ぶ。曲率テンソルの定義式

$$R(X, Y)W = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})W$$

はベクトル場 W に対する演算子 $R(X, Y)$ の作用を定める関係式とも読めるので、これを演算子の括弧積を用いて

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

と書くことが出来る。以上の準備の基に $\nabla_Z R$ の定義式を (項の順序を少し変えて)

$$(\nabla_Z R)(X, Y, W) = \nabla_Z(R(X, Y)W) - R(X, Y)\nabla_Z W - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W$$

の様に書いておく。上でみたように $R(X, Y)$ をベクトル場に対する演算子とみればこの右辺の各項はベクトル場 W に対する演算子の作用と見なせる (右辺第一項は W に演算子 $R(X, Y)$ を作用させたものに、更に ∇_Z を作用させたものと読めることに注意)。従って、左辺も、演算子 $(\nabla_Z R)(X, Y)$ を W に作用させた結果と読むべきであることがわかる。よって上の定義式は演算子の関係として

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R)(X, Y) &= [\nabla_Z, R(X, Y)] - R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y) \\ &= [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]] - [\nabla_Z, \nabla_{[X, Y]}] - R(\nabla_Z X, Y) - R(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

と書ける。ここで X, Y, Z を巡回させると

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z) &= [\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]] - [\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}] - R(\nabla_X Y, Z) - R(Z, \nabla_X Y) \\ (\nabla_Y R)(Z, X) &= [\nabla_Y, [\nabla_Z, \nabla_X]] - [\nabla_Y, \nabla_{[Z, X]}] - R(\nabla_Y Z, X) - R(X, \nabla_Y Z) \end{aligned}$$

が得られる。これら三式の和をとるのであるが、その際捩率テンソル $T(X, Y)$ に対し

$$\begin{aligned} R(T(X, Y), Z) &= R(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], Z) \\ &= R(\nabla_X Y, Z) - R(\nabla_Y X, Z) - R([X, Y], Z) \\ &= R(\nabla_X Y, Z) - R(\nabla_Y X, Z) - [\nabla_{[X, Y]}, \nabla_Z] - \nabla_{[[X, Y], Z]} \end{aligned}$$

が成立することに注意すると

$$\mathcal{G}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\} = \mathcal{G}\{[\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]]\} - \mathcal{G}\{R(T(X, Y), Z)\} - \nabla_{\mathcal{G}\{[[X, Y], Z]\}}$$

を得る。(ただし $\mathcal{G}(A(X, Y, Z))$ は $A(X, Y, Z)$ の X, Y, Z に関する巡回和を表す。) しかるに、ベクトル場に関するヤコビの恒等式 $\mathcal{G}\{[[X, Y], Z]\} = 0$ 及び演算子に関するヤコビの恒等式 $\mathcal{G}\{[\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]]\} = 0$ より

$$\mathcal{G}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\} = -\mathcal{G}\{R(T(X, Y), Z)\}$$

となるが、特に捩率零 ($T(X, Y) = 0$) の場合は $\mathcal{G}\{R(T(X, Y), Z)\} = 0$ なので

$$\mathcal{G}\{(\nabla_Z R)(X, Y)\} = 0$$

を得る。□

[問題] $R^m_{ljki} + R^m_{lki j} + R^m_{lij k} = 0$ (ピアンキの第 2 項等式の成分表示)

7 曲率と空間

この章では、曲率テンソルによって特徴づけられる空間のうちの幾つかのタイプについて簡単に見ておく。こうした空間の研究はリーマン幾何の主題をなすものであるが、筆者は専門家ではないのでその入り口付近を簡単に示すにとどめる。

7.1 平坦な空間

曲率テンソル R_{ijkl} が空間の至る所 0 であるような空間を平坦な空間と呼ぶ。平坦な空間の最も簡単な例として n 次元ユークリッド空間を考えることが出来る。実際、 n 次元ユークリッド空間をリーマン多様体と考えると、それは空間上の全ての点に対して共通な座標系であるデカルト座標 (x^i) がとれて、その座標でみた各点の接空間におけるリーマン計量 g がユークリッド計量 $g(X, Y) = \delta_{ij} X^i Y^j$ で与えられるような空間のことである。従って、この場合（つまりデカルト座標をとった場合）空間の至る所で計量テンソルが定数である。従ってこの座標に関してクリストッフェル記号は至る所 0 になる。よって曲率テンソル R_{ijkl} も至る所 0 である。（注：リーマン曲率はテンソル量なのである座標系で 0 であれば、どんな座標系で計算しても 0 である。）

次に平坦な空間は局所的にユークリッド空間であることを示そう。そのためには、ある局所座標が存在してその上では（至る所）計量テンソルの値が定数であるように出来ればよい。（そのような座標系がみつければ、それをユークリッド型の計量に直すのは単なる線型代数の問題である。）6.7 節（あるいは 4.1 節）で述べたように、リーマン計量から導かれる接続係数（クリストッフェル記号）については

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = [i, k j] + [j, k i] = g_{i\mu} \Gamma_{kj}^{\mu} + g_{j\mu} \Gamma_{ki}^{\mu}$$

であったので、すべての Γ_{ij}^k が 0 であるように出来れば $\partial_k g_{ij} = 0$ 、すなわち g_{ij} がすべて定数であるように出来る。一方、クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k の変換則

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \bar{u}^{\mu}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^j} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\rho}} + \frac{\partial^2 \bar{u}^{\rho}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\rho}}$$

に注目すると、 n 変数 (u^i) の n 個の関数の組 \bar{u}^j で

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^{\rho}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial \bar{u}^{\rho}}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^k$$

を満足するものが存在するなら、それを新しい変数とした場合の $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ はすべて 0 になる。よって、問題は上の条件式を \bar{u}^j に対する連立偏微分方程式と見た場合の解の存在（完全積分可能条件）の問題となる。連立偏微分方程式の積分可能条件は、本質的には解である関数の偏微分順序に関する交換可能性に由来するので、以下ではそれを調べる。

上の \bar{u}^{ρ} に対する方程式を更に u^l で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{u}^{\rho}}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial^2 \bar{u}^{\rho}}{\partial u^l \partial u^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial \bar{u}^{\rho}}{\partial u^k} \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \\ &= \frac{\partial \bar{u}^{\rho}}{\partial u^k} \left(\Gamma_{l\mu}^k \Gamma_{ij}^{\mu} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \right) \end{aligned}$$

を得る。同様の式で、 i と l を入れ替えたものをつくり、辺々引き算すれば

$$\frac{\partial^3 \bar{u}^{\rho}}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 \bar{u}^{\rho}}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} = \frac{\partial \bar{u}^{\rho}}{\partial u^k} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^k}{\partial u^i} + \Gamma_{l\mu}^k \Gamma_{ij}^{\mu} - \Gamma_{i\mu}^k \Gamma_{lj}^{\mu} \right)$$

を得るが、この右辺いの括弧の中は丁度曲率テンソルの成分 R_{lij}^k に等しい。しかるに、いま仮定より曲率テンソルは 0 テンソルなのであるから、すべての添え字の組み合わせに対して偏微分順序が交換可能である事が言えて、 n 個の関数 \bar{u}^j は完全積分可能である。よって曲率テンソルが 0 であれば、クリストッフェル記号を恒等的に 0 にする局所座標がとれて、その空間は局所的にユークリッド空間であることがわかる。

7.2 定曲率空間

点 P における断面曲率の定義を共変曲率テンソルと二つの方向ベクトル $X = (X^i), Y = (Y^j)$ を用いて

$$K_P(X, Y) = \frac{R_{ijkl}X^iY^jX^kY^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})X^iY^jX^kY^l}$$

と書いておく。もし、ある点における断面曲率が、それを定める平面（あるいは方向ベクトル X, Y ）の採り方によらず一定の値をとるなら、その値を k とおいて上式の分母を払うと、

$$\{R_{ijkl} - k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\}X^iY^jX^kY^l = 0$$

を得る。これが任意の $(X^i), (Y^j)$ に対して成立する事より関係式

$$R_{ijkl} - k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 0 \quad (7.1)$$

が得られる。一方逆に、ある実数 k があって曲率テンソルと計量テンソル（の全ての成分）がこの関係式を満たすなら、今の議論を逆にたどる事で任意の（異なる）二つ方向ベクトル X, Y に対して断面曲率 $K_P(X, Y)$ が同じ値 k をとる事もわかる。すなわち (7.1) 式が成り立つことは、（考えている点での）断面曲率が方向に依らず一定になるための必要十分条件になっている。リッチテンソル、曲率スカラーの定義及び $g^{ik}g_{ik} = g^{ki}g_{ki} = \delta_k^k = n$ （ただし n は空間の次元）に注意し、この式に g^{ik} を掛けて縮約すると、

$$\begin{aligned} g^{ik}R_{ijkl} - k(g^{ik}g_{ik}g_{jl} - g^{ik}g_{il}g_{jk}) &= R_{jkl}^k - k(\delta_k^k g_{jl} - \delta_l^k g_{jk}) \\ &= R_{jl} - k(ng_{jl} - g_{jl}) \\ &= R_{jl} - k(n-1)g_{jl} = 0 \end{aligned}$$

更に g^{il} を掛けて縮約すると

$$R - kn(n-1) = 0$$

すなわち

$$k = \frac{R}{n(n-1)}$$

を得る。従って、ある点における断面曲率がすべての方向に対して一定であるなら、その値は、その点におけるスカラー曲率の $1/n(n-1)$ 倍である（このこと自体は既に 5.5 節で触れておいた）。

次にこの性質（断面曲率が方向によらない）が空間の全ての点において成り立っているとしよう。その場合各点毎に決まる k の値は、一般には場所毎に異なっていると考えられるが、実は空間（多様体）の次元が 3 以上の場合には、その値は空間（の連結成分）の至る所で同じになることが示される。実際にはもう少し一般的に次の定理が言える。

[定理] M を、その次元が 3 次元以上の連結なリーマン多様体であるとする。このとき M 上の関数 λ があって、

$$R_{ijkl} = \lambda(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

が成り立つように出来るなら、 λ は M 上の定数である。（注：多様体（空間）が連結であるとは、それがひとつつながりになっている事を云う。連結でない場合には、各連結成分毎にこの定理が成り立つ。）

[証明] リーマン計量の共変微分に対し $\nabla_k g_{ij} = 0$ が成立する事に注意しながら上式をビアンキの恒等式に代入してやると、

$$\begin{aligned} \nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} \\ = (\nabla_m \lambda)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + (\nabla_k \lambda)(g_{il}g_{jm} - g_{im}g_{jl}) + (\nabla_l \lambda)(g_{im}g_{jk} - g_{ik}g_{jm}) = 0 \end{aligned}$$

これに g^{ik} をかけて縮約すると

$$\begin{aligned} (\nabla_m \lambda)(\delta_k^k g_{jl} - \delta_l^k g_{jk}) + (\nabla_k \lambda)(\delta_l^k g_{jm} - \delta_m^k g_{jl}) + (\nabla_l \lambda)(\delta_m^k g_{jk} - \delta_k^k g_{jm}) \\ = (\nabla_m \lambda)(n-1)g_{jl} + \{(\nabla_l \lambda)g_{jm} - (\nabla_m \lambda)g_{jl}\} + (\nabla_l \lambda)(1-n)g_{jm} \\ = (\nabla_m \lambda)(n-2)g_{jl} + (\nabla_l \lambda)(2-n)g_{jm} \\ = (n-2)\{(\nabla_m \lambda)g_{jl} - (\nabla_l \lambda)g_{jm}\} = 0 \end{aligned}$$

更に g^{jl} をかけて縮約すると

$$(n-1)(n-2)(\nabla_m \lambda) = 0$$

を得る。従って、 $n \geq 3$ であれば、すべての添字にわたって $\nabla_m \lambda = 0$ 、すなわち $\partial \lambda / \partial u^m = 0$ を得る。よって、スカラー関数 λ は、場所によらない定数となる。□

つまり、空間の各点で断面曲率が方向によらず一定であるなら、それは空間の至る所で定数である。このような空間を定曲率空間と呼ぶ。前節でみた平坦な空間は（すべての断面曲率が 0 であるような）定曲率空間の特別な場合である。また、 $n+1$ 次元ユークリッド空間の中の半径 a の n 次元球面 $S^n(r)$ は断面曲率 $1/a^2$ の定曲率空間である。

7.3 アインシュタイン空間

次に、空間の各点に置いてリッチ曲率が方向によらず一定になるような空間を考える。リッチテンソルから作られる二次形式 Q に点 P における方向ベクトル $X = (X^i)$ をその大きさ（ノルム） $\|X\| = \sqrt{g_{ij}X^iX^j}$ で規格化したものを代入したものを $M(X)$ とおくと、

$$M(X) = Q\left(\frac{X}{\|X\|}\right) = \frac{R_{ij}X^iX^j}{g_{ij}X^iX^j}$$

を得る。これが、点 P における X 方向のリッチ曲率の定義であった。ここで、 $M(X)$ が方向ベクトル X によらない定数であった場合を考えると、

$$(R_{ij} - Mg_{kj})X^iX^j = 0$$

が得られるが、 $X = (X^i)$ の任意性を考えると、これより係数に関する n^2 個の関係式

$$R_{ij} - Mg_{ij} = 0 \tag{7.2}$$

を得る。この関係式はリッチテンソルと計量テンソルの間に比例関係があることを意味している。一方逆に逆れば、或る点に於いてリッチテンソルと計量テンソルが比例するならば、その点における任意の方向のリッチ曲率はその比例定数 M に一致する。すなわち上の条件はリッチ曲率が（ある点に於いて）方向に依らず一定になるための必要十分条件である。上式に g^{ij} をかけて縮約すると

$$R - Mn = 0$$

すなわち

$$M = \frac{R}{n}$$

を得るので、上記比例定数はスカラー曲率の $1/n$ であることがわかる。実は前節で見た定曲率空間の場合と同様、空間の次元が 3 以上であれば次の定理が成立する。

[定理] M を次元が 3 以上の連結な多様体とする。このとき M 上の関数 λ が存在して

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}$$

と出来るなら、 λ は M 上の定数である。

[証明] ビアンキの恒等式

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$$

に g^{ik} をかけて縮約する（ただし第 2 項はそのまま置いておく）と、

$$\begin{aligned} & \nabla_m g^{ik} R_{ijkl} + g^{ik} \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l g^{ik} R_{ijmk} \\ &= \nabla_m R_{jl} + g^{ik} \nabla_k R_{ijlm} - \nabla_l R_{jm} \\ &= (\nabla_m \lambda) g_{jl} + g^{ik} \nabla_k R_{ijlm} - (\nabla_l \lambda) g_{jm} = 0 \end{aligned}$$

を得る。ただし第一項と第三項には関係式 $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ を代入し、また関係式 $\nabla_k g_{ij} = 0$ を用いた。この式に更に g^{jl} を掛けて縮約すると

$$(\nabla_m \lambda) n + g^{jl} g^{ik} \nabla_k R_{ijlm} - (\nabla_l \lambda) \delta_m^l = 0$$

であるが、この第2項に於いて先に j, l について和をとり関係式 $R_{im} = \lambda g_{im}$ を代入してから i, k について和をとると、

$$\begin{aligned} & (\nabla_m \lambda)n - (\nabla_k \lambda)\delta_m^k - (\nabla_l \lambda)\delta_m^l \\ &= (\nabla_m \lambda)n - 2(\nabla_m \lambda) \\ &= (n-2)\nabla_m \lambda \end{aligned}$$

を得る。よって前節の定理と同様、 $n \geq 3$ であれば、関数 $\lambda(u)$ は定数である。□

こうして、空間の各点でリッチテンソルが計量テンソルに比例するという空間では、その比例係数が空間全体にわたって定数になるという著しい特徴がある。そこで、空間の各点で関係式 (7.2) が成り立つような計量 g をアインシュタイン計量と呼び、アインシュタイン計量を持つ空間（リーマン多様体）を（数学用語として）アインシュタイン空間（あるいはアインシュタイン多様体）と呼ぶ。

特に、3次元のアインシュタイン空間は定曲率空間になることが知られている。

7.4 ローレンツ多様体

前節のアインシュタイン空間及び前々節の定曲率空間の議論に於いては、ビアンキの恒等式が重要な役割を果たしていた。本稿の最後に、ビアンキの恒等式から導かれる一つのテンソルを定義しておこう。それは一般相対論において重要な役割を果たすものである。

前節の定理の証明と同様に、ビアンキの恒等式

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$$

に g^{ik} を掛けて和をとる（縮約）すると

$$\nabla_m R_{jl} + g^{ik} \nabla_k R_{ijlm} - \nabla_l R_{jm} = 0$$

が得られる。今回はここでアインシュタイン計量を仮定してリッチテンソルを書き換えたが、今回は計量に何も条件を付けていないので、このカタチのまま g^{jl} を掛けて縮約する。そうすると、

$$\begin{aligned} & \nabla_m g^{jl} R_{jl} + g^{ik} \nabla_k g^{lj} R_{ijlm} - \nabla_l g^{lj} R_{jm} \\ &= \nabla_m R - \nabla_k g^{ki} R_{il} - \nabla_l R_m^l \\ &= \nabla_m R - 2\nabla_k R_m^k = 0 \end{aligned}$$

を得る。それ故

$$G_j^i = R_j^i - \frac{1}{2} R \delta_j^i$$

とにおいて、これを ∇_i で共変微分すると

$$\begin{aligned} \nabla_i G_j^i &= \nabla_i (R_j^i - \frac{1}{2} R \delta_j^i) \\ &= \nabla_i R_j^i - \frac{1}{2} \nabla_j R = 0 \end{aligned}$$

を得る。この左辺は、 G_j^i に対する（ n 次元リーマン多様体上での）発散に相当する量であり、 n 次元リーマン多様体を時空と解釈した場合には、この式は G_j^i に対する保存則と見なされるものである。そこで G_j^i あるいはその添字を上にとりえた量

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij}$$

等をアインシュタイン・テンソルと呼ぶ。（ $n+1$ 次元多様体において、リーマン計量の代わりに非退化不定値計量であるローレンツ計量（符号数 $(n, 1)$ の計量）を考えたものを一般にローレンツ多様体と呼ぶが、アインシュタインは、4次元ローレンツ多様体においてこのアインシュタイン・テンソルを物質分布（の相対論的拡張）に相当するエネルギー運動量テンソル T^{ij} と等値することで重力場の方程式（アインシュタイン方程式）

$$R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij} = \kappa T^{ij}$$

を得た。時空を4次元ローレンツ多様体であると考え、これを物質分布が計量 g を規定する方程式とみなして時空を議論するのが(重力理論としての)一般相対性理論であるが、ここではこれ以上立ち入らない。なお、上式で $T^{ij} = 0$ の場合を考えると(添字を下に降ろして)

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 0$$

を得る。これは物質等のない部分での重力場の方程式と考えられる。少々紛らわしいのであるがこの条件は前節でみたアインシュタイン空間の条件と同じではない(より強い)ので注意が必要である。というのはこの式に g^{ij} を掛けて縮約すると、 $g^{ji}g_{ij} = \delta_j^j = n$ より

$$R - \frac{n}{2}R = \frac{2-n}{2}R = 0$$

が得られて、($n=2$ でなければ) $R=0$ が結論されるからである。これを上式の戻してやると(あるいは前節の結果を援用して)

$$R_{ij} = 0$$

が結論される。これは空間の各点で(全ての方向に対し)リッチ曲率が0である事を意味する。この条件(リッチテンソルが0)をリッチ平坦と呼ぶ場合がある。リッチ曲率は(或る方向の)断面曲率の平均であるから、リッチ平坦であっても曲率テンソル R^i_{jkl} が0であるとは限らない。