

Maxwell の方程式

2004.11.11. by 村上

Maxwell の方程式は (MKSA 単位系で) 以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{H} は磁場、 \mathbf{B} は磁束密度、 \mathbf{D} は電束密度であり、 ρ は電荷密度、 $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ は電流密度である。真空中では、電束密度と電場、磁束密度と磁場の間には

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2)$$

の関係がある。ただし ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空中の誘電率と透磁率と呼ばれる定数であり、それらの間には c を光速として $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ の関係がある。

従って、真空中の Maxwell の方程式は (例えば) \mathbf{E} と \mathbf{B} をのみを用いて、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3)$$

と表現される。以下では \mathbf{B} を単に磁場と呼ぶ。

付録でみたベクトル場 (の微分) と微分形式の対応関係を念頭におき、 $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$ 、 $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$ に対し、

$$\begin{aligned} \omega_e &= E_x dx + E_y dy + E_z dz \\ \omega_m &= B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \end{aligned} \quad (4)$$

という二つの微分形式を導入すると、真空中の Maxwell の方程式は、これらを用いて、

$$\begin{aligned} d * \omega_e &= \frac{\rho}{\epsilon_0} dx \wedge dy \wedge dz \quad , \quad d \omega_e = -\dot{\omega}_m \\ d * \omega_m &= 0 \quad , \quad d \omega_m = \frac{1}{c^2} (* \dot{\omega}_e) + \mu_0 (j_x dy \wedge dz + j_y dz \wedge dx + j_z dx \wedge dy) \end{aligned}$$

と書かれる。ただし、2 次微分形式 $\omega = X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$ に対し、

$$\dot{\omega} = \frac{\partial X}{\partial t} dy \wedge dz + \frac{\partial Y}{\partial t} dz \wedge dx + \frac{\partial Z}{\partial t} dx \wedge dy$$

とおいた。ここで時間に関する微分を特別扱いし、 $\dot{\omega}$ のような記号を導入したが、これはあまり美しいことではない。そこで、3 次元空間における外微分の概念を拡張して、上の方程式系を、4 次元空間における外微分 (と * 作用素) のみを用いてうまく表現することを次節で考えてみる。

4 次元空間 \mathbf{R}^4 上の微分形式

$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ とおいた 4 次元空間 \mathbf{R}^4 を考えよう。時間座標に関して $x^0 = ct$ とした意味は後で明らかになるが、ここではとりあえず (物理量としての) 次元を合わせたのだと考えておく。

4 次元空間 \mathbf{R}^4 上の微分形式は、3 次元の場合とほぼ同様に、 $dx^i, dx^i \wedge dx^j, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$ (i, j, k, l は $0, 1, 2, 3$ を動く) らを基底として構成することが出来る。このとき微分形式がつくる線型空間 $A^k(\mathbf{R}^4)$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) の次元が、1, 4, 6, 4, 1 になることは、基底に関する考察から容易に解る。これらの空間の間に外微分 d が定義できて、それらが $dd = 0$ を満足する線型写像を与えていることも容易に確認できる。

問題：これらを確認せよ。

しかしながら、微分形式の間の * 作用素は底空間 $V = \mathbf{R}^4$ の計量に応じて決まる。我々の住んでいる空間が (少なくとも近似的には) ユークリッド的であることは、ギリシャ時代の昔から広く認識されていることであるが、時間と空間を一緒にした 4 次元時空がユークリッド的計量を持つかどうかは自明なことではない。よって、4 次元時空上の * 作用素がどうなるかをアプリアリに決めることは出来ないが、とりあえずは時空がユークリッド的計量を持つとして、しばらく計算を進めてみる。

底空間 V が 4 次元ユークリッド空間であると仮定すると、その場合の * 作用素は、以下の基底間の対応関係から決定される。

$$\begin{aligned}
 *(dx^0 \wedge dx) &= dy \wedge dz, & *(dy \wedge dz) &= dx^0 \wedge dx \\
 *(dx^0 \wedge dy) &= dz \wedge dx, & *(dz \wedge dx) &= dx^0 \wedge dy \\
 *(dx^0 \wedge dz) &= dx \wedge dy, & *(dx \wedge dy) &= dx^0 \wedge dz \\
 *(dx^0) &= dx \wedge dy \wedge dz, & *(dx \wedge dy \wedge dz) &= -dx^0 \\
 *(dx) &= -dx^0 \wedge dy \wedge dz, & *(dx^0 \wedge dy \wedge dz) &= dx \\
 *(dy) &= -dx^0 \wedge dz \wedge dx, & *(dx^0 \wedge dz \wedge dx) &= dy \\
 *(dz) &= -dx^0 \wedge dx \wedge dy, & *(dx^0 \wedge dx \wedge dy) &= dz
 \end{aligned} \tag{5}$$

ただし、ここでは 3 次元空間における記法との親和性を図るために x^0 以外の座標には、添え字を付けずに x, y, z で表している。

問題：上の関係式を確認せよ。(付録 B の外積代数に関するメモを参照せよ)

以上の準備の下に、次の計算を行う。電場 \mathbf{E} 及び磁場 \mathbf{B} の成分から

$$\begin{aligned}
 \omega_{em} &= -\frac{1}{c}(E_x dx^0 \wedge dx + E_y dx^0 \wedge dy + E_z dx^0 \wedge dz) \\
 &\quad + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy
 \end{aligned} \tag{6}$$

なる 2 次微分形式をつくり、その外微分の定義に従い $d\omega_{em}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
 d\omega_{em} &= \left\{ \frac{1}{c}(\text{rot } \mathbf{E})_x + \frac{\partial B_x}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dy \wedge dz \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{c}(\text{rot } \mathbf{E})_y + \frac{\partial B_y}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dz \wedge dx \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{c}(\text{rot } \mathbf{E})_z + \frac{\partial B_z}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dx \wedge dy \\
 &\quad + (\text{div } \mathbf{B}) dx \wedge dy \wedge dz
 \end{aligned} \tag{7}$$

を得る。一方、Maxwell の方程式 (3) を x^0 を用いて書き直しておく

$$\begin{aligned}
 \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \frac{1}{c} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^0}, \\
 \text{div } \mathbf{B} &= 0, & \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0} + \mu_0 \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{8}$$

を得るが、この $\text{rot } \mathbf{E}$ と $\text{div } \mathbf{B}$ に関する式より、(7) 式の右辺の各項の係数がすべて 0 になることがわかる。すなわち、 $d\omega_{em} = 0$ である。

問題：(7) 式を実際に計算して見よ。また (8) 式を確かめよ。

(6) 式は単に電場と磁場の成分を係数とするある或る微分形式を定義したにすぎないが、その外微分をとると、Maxwell の方程式のうち 2 つが既に (自動的に) 満たされていることがわかる。このことは、Maxwell の方程式のうちの半分は、電磁気的な性質に関する物理法則と云うよりは、むしろ場の空間構造に関係したものであることを予感させる。この点については後でもう一度立ち返るとして、もう少し計算を続けよう。今見た成功に気をよくして、Maxwell の方程式の残りの半分も、 ω_{em} をいじってやることで出てこないだろうかと考え、今度は $d*\omega_{em}$ を計算してみる。まず、(5) で計算しておいた * 作用素の各基底に対する振る舞いより

$$\begin{aligned}
 *\omega_{em} &= -\frac{1}{c}(E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy) \\
 &\quad + B_x dx^0 \wedge dx + B_y dx^0 \wedge dy + B_z dx^0 \wedge dz
 \end{aligned} \tag{9}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
d * \omega_{em} = & \left\{ -(\text{rot } \mathbf{B})_x - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dy \wedge dz \\
& + \left\{ -(\text{rot } \mathbf{B})_y - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dz \wedge dx \\
& + \left\{ -(\text{rot } \mathbf{B})_z - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dx \wedge dy \\
& - \frac{1}{c} (\text{div } \mathbf{E}) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

を得る。得られた式と (8) 式を見比べると、 $dx^0 \wedge \dots$ の係数と電流密度が、また $dx \wedge dy \wedge dz$ の係数と電荷密度が対応しているようにも思えるが、よく見ると、 $\text{rot } \mathbf{B}$ の符号が一致しないことがわかる。

つまり (6) 式に対する $d * \omega_{em}$ は Maxwell の方程式の残りの 2 つに大変よく似てはいるが、残念ながら一致しないのである。一致しないのは $\text{rot } \mathbf{B}$ の符号だけなので、(6) 式における ω_{em} の定義を少しいじれば、符号を合わせることが出来るのではと思えるかもしれないが、試みればわかるようにこれは不可能である。

問題：このことを確かめよ。

ミンコフスキー空間

先に見たように、 ω_{em} の定義をいじっただけでは $d\omega_{em}, d * \omega_{em}$ を Maxwell の方程式に一致させることは出来なかった。しかしながら、全く違う方法でなら、これらを Maxwell 方程式に一致させることは可能である。両者の不一致は $\text{rot } \mathbf{B}$ の符号において起こることに注意しつつ (6), (9) 式をよく吟味すると、* 作用素による基底の変換則において、 $*(dy \wedge dz) = -dx^0 \wedge dx$ といった関係がもし成立するなら、 $d * \omega_{em}$ が Maxwell の方程式の残る 2 つを表現することが期待できる。しかし、そのようなことは可能であろうか？ 数学の一般論の教えるところによれば、これは可能である。そのためには時空の計量をユークリッド計量からローレンツ計量に変更すれば良い。ローレンツ計量とは (3,1) 型の非正定値計量であり、そのような計量を持つ空間はミンコフスキー空間と呼ばれる。

R^4 にローレンツ計量が入っているとして、* 作用素を微分形式の各基底に作用させてみると、今度は

$$\begin{aligned}
*(dx^0 \wedge dx) &= dy \wedge dz, & *(dy \wedge dz) &= -dx^0 \wedge dx \\
*(dx^0 \wedge dy) &= dz \wedge dx, & *(dz \wedge dx) &= -dx^0 \wedge dy \\
*(dx^0 \wedge dx) &= dx \wedge dy, & *(dx \wedge dy) &= -dx^0 \wedge dz \\
*(dx^0) &= dx \wedge dy \wedge dz, & *(dx \wedge dy \wedge dz) &= dx^0 \\
*(dx) &= dx^0 \wedge dy \wedge dz, & *(dx^0 \wedge dy \wedge dz) &= dx \\
*(dy) &= dx^0 \wedge dz \wedge dx, & *(dx^0 \wedge dz \wedge dx) &= dy \\
*(dz) &= dx^0 \wedge dx \wedge dy, & *(dx^0 \wedge dx \wedge dy) &= dz
\end{aligned} \tag{10}$$

という関係が得られる。よって、(6) 式の ω_{em} に対し

$$\begin{aligned}
* \omega_{em} = & -\frac{1}{c} (E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy) \\
& - (B_x dx^0 \wedge dx + B_y dx^0 \wedge dy + B_z dx^0 \wedge dz)
\end{aligned} \tag{11}$$

であり、

$$\begin{aligned}
d * \omega_{em} = & \left\{ (\text{rot } \mathbf{B})_x - \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dy \wedge dz \\
& + \left\{ (\text{rot } \mathbf{B})_y - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dz \wedge dx \\
& + \left\{ (\text{rot } \mathbf{B})_z - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x^0} \right\} dx^0 \wedge dx \wedge dy \\
& - \frac{1}{c} (\text{div } \mathbf{E}) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned} \tag{12}$$

となることが解る。従って、ミンコフスキー空間における4次元電流密度をを表す微分形式として

$$\omega_J = -c\rho dx \wedge dy \wedge dz + j_x dx^0 \wedge dy \wedge dz + j_y dx^0 \wedge dz \wedge dx + j_z dx^0 \wedge dx \wedge dy \quad (13)$$

を導入すれば、 ω_{em} に対して

$$\begin{aligned} d\omega_{em} &= 0 \\ d*\omega_{em} &= \mu_0 \omega_J \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立ち、これらはまさしく Maxwell の方程式そのものである。

問題：式(11)~(12)及び(14)を実際に計算する事により確かめよ。なお、(5),(11)の計算にあたっては、*作用素に関する公式 $**\alpha = (-1)^{p(n-p)+\frac{n-t}{2}}$ が有用である(付録B参照)。ただし、 n は底空間の次元、 t は計量の符号数(すなわち、計量の正負の型を (r,s) とするとき $t=r-s$)であり、 p は α の次数である。

問題：(14)の2番目の式の外微分をとると、 d の性質 $dd=0$ より $d\omega_J=0$ という関係式が得られる。これを実際に計算してみると、電荷の保存則 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ が得られる。これを確かめよ。

問題：4次元ミンコフスキー空間において $*(1) = -dx^0 \wedge dx \wedge dy \wedge dz$ 及び $*(dx^0 \wedge dx \wedge dy \wedge dz) = 1$

かくして、(真空における)Maxwellの方程式は4次元ミンコフスキー空間における微分形式により(14)のように非常に単純かつ美しく書けることがわかった。このことは、時空の計量がユークリッド的であれば不可能なことでもあった。(もし時空がユークリッド的であればMaxwell方程式は修正を必要とするが、それでは観測事実と合わない。)つまり、電磁気学の諸法則(Maxwellの方程式)が正しいなら、それを整合的に記述する時空はローレンツ計量を持たねばならない。