

電磁場の(相対論的)古典論

2004.11.13. by 村上

前章でみたように、(真空における) Maxwell の方程式は 4 次元ミンコフスキー空間における微分形式により

$$\begin{aligned}d\omega_{em} &= 0 \\d*\omega_{em} &= \mu_0\omega_J\end{aligned}\tag{1}$$

非常に単純かつ美しく書けた(本章の記号は前章のものをそのまま引き継ぐ)。このうち 2 番目の式は確かに電荷・電流分布と電磁場を結びつける式であるが、最初の式は先に少し触れたように、場の空間構造を規定(制約)する関係式とみるべきものである。以下このことを少し説明する。

4 次元ポテンシャル

一般に p 次の微分形式 ω が性質 $d\omega = 0$ を満たすとき、閉形式であると云われる。また、 ω が、 $p-1$ 次の微分形式 ξ によって $\omega = d\xi$ の様に表されているとき、 ω は完全形式であると云われる。(完全形式の最もよく知られている例は、関数の全微分として書かれる一次微分形式であろう。)このとき、外微分の性質 $dd = 0$ に注意すると、完全形式は必ず閉形式になっていることが解る。では逆に、閉形式は完全形式であるかと問えば、全く一般にはそうではない。しかしある条件の下ではこの逆が成立する。それは、 ω が空間 R^n 全体、もしくは或る可縮な領域(これは連続変形により 1 点に縮めることができる領域を云う)全体において定義されいる場合(すなわち、 ω がそれらの領域内に特異点を持たない場合)である。その場合には閉形式 ω に対して或る $p-1$ 形式 ξ が存在して $\omega = d\xi$ と書けることになる。電磁場を表す ω_{em} の場合、Maxwell の方程式から空間の至る所 $d\omega_{em} = 0$ が保証されるので、ある 1-形式

$$\omega_A = A_0 dx^0 + A_x dx + A_y dy + A_z dz\tag{2}$$

が存在して、

$$d\omega_A = \omega_{em}\tag{3}$$

と表されることになる。この 1-形式 ω_A をベースに考えるなら、(1) 式の最初の式は自動的に満たされるので Maxwell の方程式は単に

$$d*d\omega_A = \mu_0\omega_J\tag{4}$$

というたった一つの式にまとめることが出来る。

ここに導入した 1-形式 ω_A は、電磁気学において通常、電磁ポテンシャルとか 4 元ポテンシャル(いわゆるスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを 4 次元形式で書いたもの)に対応するのであるが、ベクトル形式でこれを美しく表現するにはもう少し計算の準備が必要となる。

4 次元ポテンシャル(続き)

(4) 式の左辺を具体的に計算してみよう。まず(2)の外微分、

$$\begin{aligned}d\omega_A &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x}\right) dx^0 \wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial y}\right) dx^0 \wedge dy + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial z}\right) dx^0 \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy\end{aligned}$$

をとり、* 作用素を作用させると

$$\begin{aligned}*d\omega_A &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial y}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial z}\right) dx \wedge dy \\ &- \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dx^0 \wedge dx - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dx^0 \wedge dy - \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx^0 \wedge dz\end{aligned}$$

を得る。これに更に d を作用させると、

$$\begin{aligned}
d*\omega_A = & \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^0 \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^0 \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^0 \partial z} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\
& + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^0 \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right) dx^0 \wedge dy \wedge dz \\
& + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^0 \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right) dx^0 \wedge dz \wedge dx \\
& + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^0 \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right) dx^0 \wedge dx \wedge dy
\end{aligned} \tag{5}$$

となるが、その成分はあまり美しい形ではない。一方、 ω_A に $*$ 作用素を作用させて

$$*\omega_A = A_0 dx \wedge dy \wedge dz + A_x dx^0 \wedge dy \wedge dz + A_y dx^0 \wedge dz \wedge dx + A_z dx^0 \wedge dx \wedge dy$$

としてから $d\omega_A$ を計算すると

$$d*\omega_A = \left(\frac{\partial A_0}{\partial x^0} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx^0 \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

を得る。これに $*$ を作用させて一度関数にしておいてから更に d を作用させる (すなわち 4 次元 grad をとる) と

$$\begin{aligned}
d*d*\omega_A = & \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^0 \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^0 \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^0 \partial z} \right) dx^0 \\
& + \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial x \partial x^0} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) dx \\
& + \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial y \partial x^0} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) dy \\
& + \left(\frac{\partial^2 A_0}{\partial z \partial x^0} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) dz
\end{aligned}$$

を得るが、これと (5) を比べれば、

$$*d*d*\omega_A + d*d*\omega_A = -\square \omega_A \tag{6}$$

という関係式が成り立っていることがわかるだろう。ただし

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{7}$$

であって、これはダランベール作用素 (d'Alembertian) と呼ばれているものである。また、1-形式 ω に対し $\square \omega$ は、その各成分に \square を作用させた 1-形式を表しているものとする。

問題：任意の 0-形式、2-形式、3-形式、4-形式に対し、(6) と同様の関係式が成立することを示せ。

ゲージ変換

前節の関係式 (6) において、もし ω_A として $d*\omega_A = 0$ を満足するものがとれるなら、

$$*d*d*\omega_A = -\square \omega_A \tag{8}$$

が成立することになり、(4) 式を成分で記述したものはとても美しいものになるであろう。以下ではしばらく、そのような事が可能であるかどうかを考えるが、それに先立ち次のことを注意しておこう。

$u(t, x, y, z)$ を、ある関数 (スカラー場) として $\omega_A' = \omega_A + du$ で与えられる 1-形式を考える。このとき $ddu = 0$ に注意すると、

$$d\omega_A' = d\omega_A + ddu = d\omega_A \quad (= \omega_{em})$$

となって、 ω_A' と ω_A は全く同じ電磁場を与えることがわかる。つまり 4 次元ポテンシャルには u をスカラー場として、 du だけの不定性があるのである。この不定性をゲージ自由度と呼び、 du による 4 次元ポテンシャル間の変換をゲージ変換と云う。

そこで、このゲージ自由度を利用して、任意に与えられた4次元ポテンシャルから得られる1形式 ω_A が、 $d*\omega_A = 0$ を満たすようにすることを考えるのである。 $\omega_A' = \omega_A + du$ に対し $d*\omega_A'$ を具体的に計算してみると、

$$d*\omega_A' = d*\omega_A + d*du = d*\omega_A - (\square u) dx^0 \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

となるので、 $d*\omega_A$ が0でない場合には、方程式

$$\square u = \frac{\partial A_0}{\partial x^0} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

を解いて得られる u を用いて $\omega_A + du$ と書かれる1形式を改めて ω_A とおけば、 ω_A は最初から $d*\omega_A = 0$ すなわち条件

$$\frac{\partial A_0}{\partial x^0} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

を満足していると考えてよい。条件(9)は4次元ポテンシャルに対するローレンツ条件と呼ばれ、ローレンツ条件を満たすようにゲージ自由度を決めることをローレンツゲージを選ぶと云う。

従って、ローレンツゲージを選んでおくことにより(4)式は

$$\square \omega_A = -\mu_0 * \omega_J \quad (10)$$

と書かれることになる。これをベクトル形式の表現になおすと、

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (11)$$

あるいは

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (12)$$

を得る。これが、ローレンツゲージを採用した4次元ベクトルで書かれたMaxwellの方程式である。

問題：本節の計算を確認せよ。

電磁波

4次元ポテンシャルで書かれた(12)式は、いわゆる波動方程式の形をしているが、実は電場 E 及び磁場 B 自体も同様の方程式を満たす。そのことは(1)式の2番目の式の外微分をとることにより容易に確認することが出来る。

問題：このことを確認せよ。

従って、電磁場は電流密度を波源として真空中を波動(電磁波)として伝播することが出来、光速 c はまさしくその際の波動の伝播速度に他ならない。とすれば、ここに一つの疑問が生じる。それは、この c という速度が一体何に対する速度なのかという問題である。このことは、次のような問を考えてみればより明確になるであろう。ある観測者が、真空中を伝播する電磁波を観測したとする。その際現象を記述するにあたって採用した座標系が適切で有れば、観測された電磁場は、ここで議論した方程式系(すなわちMaxwellの方程式)によって記述される。では、その観測者(系)から速度 v で等速直線運動するような観測者(系)で見れば、現象はどのように記述されるのであろうか? そのときの電磁波の伝播速度は果たして c なのか?

ところで、読者は既に、微分形式というものが、(微分)方程式を座標変換によらず不変に書くための道具であることを知っているかもしれない。とすれば、新しい座標系で記述した方程式系においても全く同様の定数 c が現れるのではないだろうか? つまり、元の座標系から速度 v で運動している座標系でも真空中の電磁波(光)の伝播速度はやはり c であると考えられる。このことは一体どのように考えれば辻褄が合うのだろうか?

この一見パラドキシカルな状況を解きほぐす鍵は、異なる速度で運動する系の間で座標がどのように変換されるのかを我々は実はまだよく知らないという所にある。アインシュタイン流の言い方をすれば、我々はまだ速度の加法則を知らないのである。次節では、そのことを考察する。

ローレンツ変換