

外積代数 (要約)

2004.11.09. by 村上

ベクトル空間・計量ベクトル空間

- ・ベクトル空間の定義
- ・基底と次元
- ・非退化対称双線型形式 (広義内積=計量)
- ・計量ベクトル空間・シルベスターの慣性律と正規直交基底

符号数 $t = r - s$, $(r, s) = (+, -)$ (正規直交基底で書いた計量における+と-の数)

- ・ユークリッド内積とユークリッド空間
- ・ローレンツ内積 (符号数 $(n-2)$ の内積) とミンコフスキー空間

線型汎関数と双対空間

- ・ベクトル空間上の線型 (汎) 関数
- ・ n 次元ベクトル空間上の線型汎関数全体はまた n 次元ベクトル空間 (双対空間)
- ・反変ベクトル、共変ベクトル
- ・(広義) 内積空間の双対空間 (は自分自身と同一視できる)

テンソル代数

- ・テンソルとはベクトル空間上の多重線型形式のこと
- ・計量 (内積) はテンソルの一種
- ・基底のテンソル積とテンソルの基底

外積代数

- ・外積 (テンソル積の交代化 = 反対称化)
- ・ p -ベクトルとその空間

n 次元線型空間 V 上の p -交代形式の全体
 $\wedge^p(V)$ は ${}_n C_p$ 次元線型空間
その元をしばしば p -ベクトルと呼ぶ

- ・ p -ベクトルの内積

V が広義内積 (計量) を持つとき、
 p -ベクトル $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$, $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_p$ (各 α_i, β_j は 1 形式) に対し
 $\langle \alpha, \beta \rangle = |\langle \alpha_i, \beta_j \rangle|$ (行列式) とおけば、 $\wedge^p(V)$ に計量が入る

- ・Hodge の * 作用素

V が計量を持つとき、その正規直交基底 (の双対基底) σ^i に対し $\sigma = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$ とおき V の体積要素と呼ぶ。体積要素を一つ固定し、 p -ベクトル α に対し $n-p$ 形式 $*\alpha$ を

$$\alpha \wedge \xi = \langle *\alpha, \xi \rangle \sigma$$

が勝手な $n-p$ ベクトル ξ に対して成立するように決める。* 作用素は $\wedge^p(V)$ と $\wedge^{n-p}(V)$ の間の同型対応を与える。また、このとき

$$**\alpha = (-1)^{p(n-p) + \frac{n-t}{2}} \alpha$$

が成立する。ただし、 n は V の次元で、 t は計量の符号数である。