

# ベクトル解析と微分形式

2004.11.04. by 村上

ここでは、3次元(ユークリッド)空間におけるベクトル解析を微分形式の立場で整理し直したものについて解説する。微分形式(特に $dx, dy$ 等)の正確な定義には微分幾何の初歩が必要となり少々面倒なので、ここでは厳密な定義を与えることはせず、直感的に基づく概念の導入と計算方法の習得を目指す。

## $df, dx$ 等の定義

最初に、多変数関数の微分の定義を復習する。3変数関数 $f(x, y, z)$ の(完全)微分 $df$ は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1)$$

のように書かれるのであった。この表現の意味は、通常次のように理解される。すなわち、「或る点 $(x_0, y_0, z_0)$ から微少変位 $(dx, dy, dz)$ だけ隔たった点における関数値 $f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ と元の点における関数値 $f(x_0, y_0, z_0)$ との差 $df$ は近似的に $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ になる」。勿論これは間違いではないが、より進んだ理解のためには次のようにもう少し間接的に考える方が良い。

まず、(有限)変位 $\Delta$ なるものを $(x, y, z)$ を座標とする3次元空間における単位ベクトル $e_x, e_y, e_z$ を用いて

$$\Delta = \eta e_x + \mu e_y + \nu e_z$$

のように表しておく。このとき変位ベクトル $\Delta$ に対し、その $x$ 成分の具体的な値 $\eta$ を対応させる作用素(演算子、関数)が $dx$ なのだと考え、

$$dx(\Delta) = dx(\eta e_x + \mu e_y + \nu e_z) = \eta \quad (2)$$

と書くことにする。 $\Delta$ の具体的なカタチを考えると、上式が成り立つためには $dx$ が線形な関数でかつ、 $dx(e_x) = 1, dx(e_y) = dx(e_z) = 0$ という性質を持たば良い。同様に $dy, dz$ 等も、変位ベクトルに対して、その $y$ 成分、 $z$ 成分を与える関数(線形汎関数)であると考え、そして、 $dx$ らの $\frac{\partial f}{\partial x}$ 等を係数とする線形結合として得られる新たな作用素が $df$ なのだ考えると、変位 $\Delta$ に対する $df$ の作用は

$$\begin{aligned} df(\Delta) &= \frac{\partial f}{\partial x} dx(\Delta) + \frac{\partial f}{\partial y} dy(\Delta) + \frac{\partial f}{\partial z} dz(\Delta) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \eta + \frac{\partial f}{\partial y} \mu + \frac{\partial f}{\partial z} \nu \end{aligned} \quad (3)$$

となつて、 $df$ のとりべき値をうまく再現していることがわかる。つまり、 $df, dx$ 等が表現しているのは具体的な数値ではなく作用素(関数)であつて、そこに具体的な変位ベクトルを与えることにより初めて値が決まるのだと考えるのである。従つて(1)式が表しているのは、数値(量)の間の関係ではなく、( $df$ は $dx$ らの一次結合であるという)作用素としての関係であると思ふべきではない。これが(1)式の意味である。

ところで、(3次元ユークリッド空間に於いて)ベクトル $\mathbf{x} = x e_x + y e_y + z e_z$ に対しその $x$ 成分を取り出すには $\mathbf{x}$ と $e_x$ との内積をとれば良かった。つまり、

$$\langle e_x, \mathbf{x} \rangle = \langle e_x, x e_x + y e_y + z e_z \rangle = x \quad (4)$$

であつた。この式と(2)式を見比べると、 $dx$ をベクトルに作用させることは、 $e_x$ との内積をとることと同等であることがわかる。このことから、少々大胆に $dx$ と $e_x$ を同一視してしまうことも可能である。ただし、空間がユークリッド的でなかったり、まだ座標として直交直線座標をとらなかつた場合にはこのことは成立しない。つまり $dx$ と $e_x$ の関係は、一般には座標の入れ方に依存して決まるのであるが、このことを忘れなければ、3次元ユークリッド空間でのベクトル解析を考えるに当たつて、 $dx$ と $e_x$ を同一視しても事実上不都合は生じない。以下では3次元ユークリッド空間に直交直線座標を一つ固定した上で議論を行う。

## 微分形式とその微分

関数 $f$ の微分 $df$ は、(1)式で与えられたが、より一般に任意の関数 $X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)$ を係数とした $dx, dy, dz$ の一次結合

$$\omega = X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz \quad (5)$$

を考え、これを一次微分形式と呼ぶ。ω に対しその (外) 微分を

$$d\omega = dX \wedge dx + dY \wedge dy + dZ \wedge dz \quad (6)$$

で定義する。ただし、dX 等は関数 X 等の微分である。また ∧ は外積又はウエッジ積と呼ばれ、一次微分形式 η, μ, ν 及び実数 α, β に対し、

$$\begin{aligned} (\alpha\mu + \beta\nu) \wedge \eta &= \alpha(\mu \wedge \eta) + \beta(\nu \wedge \eta) \\ \eta \wedge \eta &= 0 \\ \eta \wedge \mu &= -\mu \wedge \eta \end{aligned} \quad (7)$$

なる関係を満たす (双線型な) 演算である。この関係式を用いて (6) 式を具体的に書き下すと

$$d\omega = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (8)$$

を得る。このように dx ∧ dy 等の一次結合で与えられるものを 2 次の微分形式と呼ぶ。一般の 2 次微分形式

$$\xi = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy \quad (9)$$

の外微分も同様に

$$d\xi = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \quad (10)$$

で定義する。ただし 3 次のウエッジ積については  $d\eta \wedge d\mu \wedge d\nu = d\eta \wedge (d\mu \wedge d\nu)$  と考え、(7) と同様の関係式が一次と 2 次の微分形式の間にも成立するとして計算する。この規則に基づき (10) 式を実際に計算すると

$$d\xi = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \quad (11)$$

を得る。

問題：(8) 式で定義した ω に対して  $dd\omega = 0$  を示せ。

一般に、 $S(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$  の形をしたものは 3 次の微分形式と呼ばれるが、その外微分  $dS \wedge dx \wedge dy \wedge dz$  をこれまで同様に計算してみると、どの項にもウエッジ積に  $dx, dy, dz$  のいずれかが必ず二回以上含まれることになり、(7) における規則からそれらは 0 となるのがわかる。つまり (3 次元空間においては) 4 次以上の微分形式は (形式的にそれらをつくらせても) すべて 0 となる。

$dx, dy, dz$  を基底とする一次微分形式全体の集合は 3 次元の線型空間をなす。これを  $A^1(R^3)$  あるいは単に  $A^1$  という記号で表す。 $A^1$  から (外積代数により) 構成される 2 次微分形式の全体  $A^2$  もまた 3 次元線型空間を形成し、その基底は  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$  によって与えられる。しかし 3 次微分形式の空間  $A^3$  における基底は本質的に  $dx \wedge dy \wedge dz$  のみであり、それは 1 次元線型空間をつくる。また、4 次以上の微分形式の空間も形式上考えることは出来るが、それらは先程見たように零元のみからなる 0 次元空間である。更に、 $R^3$  上の (連続) 関数の全体を 0 次の微分形式と呼ぶことにしておく。外微分  $d$  という操作は、ある  $n$  次の微分形式に対し一つの  $n+1$  次微分形式を与える規則を与えており、 $A^n$  から  $A^{n+1}$  への線型写像を与えている。このことを図式的に

$$A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{d} A^3 \xrightarrow{d} 0 \quad (12)$$

のように表現する。ここで外微分作用素  $d$  として特定の  $A^n$  から  $A^{n+1}$  への写像を特に指定したい場合には  $d^n$  のように  $n$  をつけて表す。

問題：上の系列において、ある  $A^n$  の両側の  $d$  (すなわち  $d^{n-1}$  と  $A^n$ ) に注目する。 $d^{n-1}$  により写像される  $A^{n-1}$  の元全体の像は  $A^n$  中の線型部分空間になっている。これを  $\text{Im}(d^{n-1})$  で表す。一方、 $d^n$  により  $A^{n+1}$  の零元に写るような  $A^n$  の元全体もまた、 $A^n$  の線型部分空間である。これを  $\text{Ker}(d^n)$  で表す。このとき (すべての  $n$  について)  $\text{Im}(d^{n-1}) \subset \text{Ker}(d^n)$  が成立する。  
(ヒント：このことと先の問いで見た  $dd = 0$  が成立することは同等である。)

一次の微分形式の全体  $A^1$  と 2 次の微分形式全体  $A^2$  は共に 3 次元の線型空間となるので、それらの間には一対一線型な (同型) 対応が存在する。そのような対応関係の一つは、

$$\begin{aligned} *(dy \wedge dz) &= dx, & *(dx) &= dy \wedge dz \\ *(dz \wedge dx) &= dy, & *(dy) &= dz \wedge dx \\ *(dx \wedge dy) &= dz, & *(dz) &= dx \wedge dy \end{aligned} \quad (13)$$

とおくことにより得られる。この対応関係を用いると、(8)式の  $d\omega$  には

$$*d\omega = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dz \quad (14)$$

という一次微分形式が対応することがわかる。同様に、3次微分形式  $dx \wedge dy \wedge dz$  と実数 1 (乗法の単位元) を対応づけると 3次微分形式全体  $A^3$  と 0次微分形式全体  $A^0$  の間の同型対応が得られる。この対応関係も同様に  $*$  で表す。これらの対応関係を表す記号 (作用素)  $*$  はホッジ作用素あるいは\*作用素と呼ばれる。

## ベクトル場の微分と微分形式

前々節でみた  $dx$  と  $e_x$  の対応関係を考えると、関数の微分  $df$  と  $f$  の勾配ベクトル (場)、

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y + \frac{\partial f}{\partial z} e_z \quad (15)$$

が対応していることはすぐわかる。更にベクトル場

$$\mathbf{X} = X(x, y, z) e_x + Y(x, y, z) e_y + Z(x, y, z) e_z \quad (16)$$

に対して (8) 式で定義される一次微分形式  $\omega_X$  をつくり、その外微分をとり、さらに\*作用素を作用させると (つまり  $*d\omega_X$  をつくると) それは回転ベクトル場

$$\text{rot} \mathbf{X} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) e_x + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) e_y + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) e_z \quad (17)$$

に対応する一次微分形式になっていることがわかる ((13) 式を見よ)。また、 $\omega_X$  に\*作用素を作用させてから外微分  $d$  をとり、その結果に更に\*作用素を作用させると ( $*d*\omega_X$  をつくると) それは  $\mathbf{X}$  の発散場

$$\text{div} \mathbf{X} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (18)$$

に対応する 0 次微分形式 (すなわち関数) を与えていることがわかる。以上のことをまとめると、ベクトル場における微分演算  $\text{div}, \text{rot}, \text{grad}$  と微分形式における外微分作用素  $d$  の間には

$$\begin{aligned} d &\longleftrightarrow \text{grad} \\ *d &\longleftrightarrow \text{rot} \\ *d* &\longleftrightarrow \text{div} \end{aligned} \quad (19)$$

なる対応関係が存在することがわかる。

問題：上の関係が前節の  $A^n$  と  $d$  系列のなかでどう位置づけられるかを確認せよ。

問題：上の対応関係に基づけば、(3次元)ベクトル解析における公式  $\text{rot grad} = 0$  及び  $\text{div rot} = 0$  は  $dd = 0$  に、 $\text{rot grad} = \Delta$  (スカラーラプラシアン) は  $*d*d = \Delta$  に、 $\text{grad div} - \text{rot rot} = \Delta$  (ベクトルラプラシアン) は  $d*d* - *d*d = \Delta$  に対応することを確認せよ。

## スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャル

### ベクトル場のホッジ分解