

二層流体中の線型波動の鉛直構造

2002.12.21 村上

Gill(1982) p119 Fig. 6.1 の状況で考える。すなわち平衡状態における層厚がそれぞれ H_1, H_2 であるような、混ざらない二層流体を考える。それぞれの層は密度一定 ($\rho_1, \rho_2; \rho_1 < \rho_2$) 非圧縮で静水圧平衡を仮定する。この状況での流体方程式から 2 次の微小量の項を落とす近似 (微小振幅の仮定) を行うと、最終的に次の方程式系を得る。ただし η, h はそれぞれ第一層、第二層の流体上面の平衡位置からの変位、 g は重力加速度である。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \Delta \{ (gH_1 + (g - g')H_2)\eta + g'H_2h \} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \Delta \{ (g - g')H_2\eta + g'H_2h \} \quad (2)$$

$$\text{ただし } g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g$$

ラプラス作用素の固有関数による変数分離

この方程式を解くために、上式右辺のラプラス作用素に注目して、その固有関数展開を考える。すなわち解を

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= \sum_{\lambda} \eta_{\lambda}(t) \psi_{\lambda}(x, y) && \left(= \int \eta_{\lambda}(t) \psi_{\lambda}(x, y) d\lambda \right) \\ h(x, y, t) &= \sum_{\lambda} h_{\lambda}(t) \psi_{\lambda}(x, y) && \left(= \int h_{\lambda}(t) \psi_{\lambda}(x, y) d\lambda \right) \end{aligned}$$

のカタチに書いておく。ただし $\psi_{\lambda}(x, y)$ は二次元ラプラス作用素の固有値 (スペクトル) $-\lambda$ に対応する固有関数である (すなわち $\Delta \psi_{\lambda} = -\lambda \psi_{\lambda}$)。

注: 例えば $\psi(x, y) = \cos(kx + ly)$ であれば $\Delta \psi = -(k^2 + l^2)\psi$ なので、 $(k^2 + l^2)$ を λ とおいて、固有値方程式を $\Delta \psi_{\lambda} = -\lambda \psi_{\lambda}$ と書いている。

これを元の方程式系に代入して ψ_{λ} に関して整理すると、固有関数の時間依存成分に関する常方程式系を得るので、それを各 λ 毎に行列 (ベクトル) のカタチで表記してやると、

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 \eta_{\lambda}}{dt^2} \\ \frac{d^2 h_{\lambda}}{dt^2} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} gH_1 + (g - g')H_2 & g'H_2 \\ (g - g')H_2 & g'H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\lambda} \\ h_{\lambda} \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。このような方程式を解く場合の常套手段は、右辺の行列を対角化するような線型変換を η, h に施してやることである。

鉛直構造方程式

上述の目的を達する (対角化する) ために固有値方程式

$$\begin{vmatrix} gH_1 + (g - g')H_2 - \mu & g'H_2 \\ (g - g')H_2 & g'H_2 - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - g(H_1 + H_2)\mu + gg'H_1H_2 = 0 \quad (4)$$

を解く。もし流体が安定成層 ($\rho_1 < \rho_2$) していれば、この 2 次方程式は必ず正の 2 実根

$$\mu_1 = \frac{1}{2}gH + \frac{1}{2}\sqrt{(gH)^2 - 4gg'H_1H_2} = gH \left(1 - \frac{g'}{g} \frac{H_1H_2}{H^2} + \dots \right) \quad (5)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}gH - \frac{1}{2}\sqrt{(gH)^2 - 4gg'H_1H_2} = g' \frac{H_1H_2}{H} \left(1 + \frac{g'}{g} \frac{H_1H_2}{H^2} + \dots \right) \quad (6)$$

$$\text{ただし } H = H_1 + H_2$$

を持つので、これは対角化可能である。次に、固有ベクトルを求める。 (α, β) を求めるべき固有ベクトルとして、 α, β に対する条件式を求めると

$$(gH - g'H_2 - \mu) \alpha + g'H_2\beta = 0$$

あるいは

$$(g - g')H_2\alpha + (g'H_2 - \mu)\beta = 0$$

を得る。これより求めるべき二つの固有ベクトルは例えば

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - g'H_2 \\ (g - g')H_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu_2 - g'H_2 \\ (g - g')H_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。そこで、これらを成分とする行列をつくると

$$\begin{pmatrix} \mu_1 - g'H_2 & \mu_2 - g'H_2 \\ (g - g')H_2 & (g - g')H_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} gH_1 + (g - g')H_2 & g'H_2 \\ (g - g')H_2 & g'H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - g'H_2 & \mu_2 - g'H_2 \\ (g - g')H_2 & (g - g')H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

と対角化できる。あるいは、同じことであるが、

$$\begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 - g'H_2 & \mu_2 - g'H_2 \\ (g - g')H_2 & (g - g')H_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \eta_\lambda \\ h_\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)g'H_2} \begin{pmatrix} (g - g')H_2 & -\mu_2 + g'H_2 \\ -(g - g')H_2 & \mu_1 - g'H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_\lambda \\ h_\lambda \end{pmatrix} \quad (9)$$

で定義される新たな変数 p_λ, q_λ を導入すれば、微分方程式 (3) は

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 p_\lambda}{dt^2} \\ \frac{d^2 q_\lambda}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\mu_1 & 0 \\ 0 & -\lambda\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\lambda \\ q_\lambda \end{pmatrix} \quad (10)$$

と変形される。既に述べたように λ, μ_1, μ_2 が正の実数であることに注意すれば、これらは振動する一般解

$$\begin{aligned} p_\lambda(t) &= A_\lambda^1 e^{i\omega_\lambda^1 t} + B_\lambda^1 e^{-i\omega_\lambda^1 t} & \left(\omega_\lambda^1 = \sqrt{\lambda\mu_1} \right) \\ q_\lambda(t) &= A_\lambda^2 e^{i\omega_\lambda^2 t} + B_\lambda^2 e^{-i\omega_\lambda^2 t} & \left(\omega_\lambda^2 = \sqrt{\lambda\mu_2} \right) \end{aligned}$$

を持つ。

線型波動の空間構造

前節で調べた固有ベクトルのカタチは ψ_λ の固有値 (すなわち水平波数) に依存せずすべての λ に対して共通にとれる。このことが解の構造に著しい特徴をもたらす。以下ではそのとことを見る。

上で求めた二つの固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 、鉛直構造に関する二つの基底ベクトル $(1, 0), (0, 1)$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ と書くことにすれば、前節の結果は各 λ 毎に

$$\eta_\lambda \mathbf{e}_1 + h_\lambda \mathbf{e}_2 = p_\lambda \mathbf{u}_1 + q_\lambda \mathbf{u}_2 \quad (11)$$

が成立する事を意味する。したがって、場を表すベクトル $\mathbf{h} = \eta \mathbf{e}_1 + h \mathbf{e}_2$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x, y, t) &= \left(\sum_\lambda \eta(t)_\lambda \psi(x, y)_\lambda \right) \mathbf{e}_1 + \left(\sum_\lambda h(t)_\lambda \psi(x, y)_\lambda \right) \mathbf{e}_2 \\ &= \sum_\lambda \psi(x, y)_\lambda (\eta(t)_\lambda \mathbf{e}_1 + h(t)_\lambda \mathbf{e}_2) \\ &= \sum_\lambda \psi(x, y)_\lambda (p(t)_\lambda \mathbf{u}_1 + q(t)_\lambda \mathbf{u}_2) \\ &= \left(\sum_\lambda p(t)_\lambda \psi(x, y)_\lambda \right) \mathbf{u}_1 + \left(\sum_\lambda q(t)_\lambda \psi(x, y)_\lambda \right) \mathbf{u}_2 \\ &= p(x, y, t) \mathbf{u}_1 + q(x, y, t) \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

が成立することになる。つまり、各波数毎に成立していた関係式 (11) は、実は場全体に対しても成立する。従って

$$\begin{aligned} p(x, y, t) &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)g'H_2} \left((g - g')H_2 \eta(x, y, t) - (\mu_2 - g'H_2) h(x, y, t) \right) \\ q(x, y, t) &= \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)g'H_2} \left(-(g - g')H_2 \eta(x, y, t) + (\mu_1 - g'H_2) h(x, y, t) \right) \end{aligned}$$

なる一次変換を場 (η, h) に施せば、新たな場の成分 p, q は波動方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \mu_1 \Delta p \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \mu_2 \Delta q \end{cases} \quad (12)$$

を満たす (問題:このことを確認せよ)。

ここで、 $\mu_1 \simeq gH$ 及び $\mu_2 \simeq g' \frac{H_1 H_2}{H}$ に注意して二つのベクトル u_1, u_2 の成分の符号を見積もると、大きな固有値 (早い位相速度) μ_1 に対応する固有ベクトルは上下の層が同位相かつ同じ周期で振動することに対応しており、小さい固有値 (遅い位相速度) μ_2 に対応する固有ベクトルは上下の層が、逆位相かつ同じ周期で振動することに対応していることがわかる。つまり二層流体中の線型波動には上下同位相で早い位相速度で (形を変えずに) 伝わる波と、上下逆位相で遅い位相速度で (形を変えずに) 伝わる波が存在することになり、これら二種類の波動の合成 (重ね合わせ) により一般の波動は表現されることになる。二層流体中のこのような二種類の波動を、モード解と呼んでおり、特に上下同位相で伝わる波をパロトロピック・モード、上下逆位相で伝わる波をパロクリニック・モードと呼ぶ。

多層流体への一般化

以上のことをふまえると、方程式系 (1) を解くには、これを

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gH_1 + (g - g')H_2 & g'H_2 \\ (g - g')H_2 & g'H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \eta \\ \Delta h \end{pmatrix} \quad (13)$$

の様に整理しておき、現れる行列の固有値問題を解いて固有値と対角化行列を求め、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{pmatrix} \quad (14)$$

の様にモード分解すれば良い (その手順と、固有値固有ベクトルは先にみたとおり)。この方法は容易に多層流体の場合に一般化することができる。その場合、一般に n 個の独立なモード解が現れる。