

内部重力波

2003.02.12. by 村上

密度成層する非圧縮静止流体における内部重力波を考える。静止 (平衡) 状態における流体の密度成層状況を $\rho_0(z)$ で表現し、それからのずれを ρ' と表す。すなわち $\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$ 。静止状態にある流体は静水圧平衡しているため、その場合の圧力を p_0 とすると $\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g$ が成立する。この p_0 を用いて、圧力場も同様に $p(x, y, z, t) = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$ と表現しておく。 u, v, w を平衡 (静止) 状態からの偏差の速度の成分とすると、非線型項を落とす近似の下に運動方程式は、

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} \tag{2}$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \tag{3}$$

と書ける。また、流体に非圧縮性 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を仮定したことより、連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

となる。一方、非圧縮の条件自体を ρ' 等を用いて書き直すと

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \tag{5}$$

が得られる。これらが密度成層する非圧縮静止流体中の内部重力波に対する支配方程式となる。

注1：Gill(1982) p128 における記述は、どのような場合に流体が非圧縮とみなせるかに関する一つの例を示しているにすぎない。流体における非圧縮の定義はあくまで $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ である。

注2：非圧縮性を表す式 (5) は、ある場所における ρ (あるいは ρ') の変化は、次の時刻に (上又は下から) その場所にやってくる流体粒子の密度によって決まることを表している。勿論これは流体が非圧縮である以上当然の事である。

上の支配方程式のうち、水平方向の運動方程式と連続の式より

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} = \Delta_H p' = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \tag{6}$$

を、また、鉛直方向の運動方程式 (3) と非圧縮性を表す式 (5) より

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial z} \tag{7}$$

を得る。ただし Δ_H は水平方向 (二次元) のラプラス作用素を表す。また (7) 式の w の係数 $-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$ をしばしば $N(z)^2$ で表し、ブランチ-バイサラ振動数と呼ぶ。

この (7) 式に Δ_H を作用させて整理し p', ρ' を消去してやると、 w だけにに関する方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + N(z)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{8}$$

を得る。従ってこれは内部重力波の支配方程式として、最初に挙げた五つの式と等価である。

ここで更に、鉛直方向の慣性項 (加速度の項) と ρ_0 の積において、密度の鉛直方向の変化を無視するという近似 (これは Bussinesq 近似と等価) を行うと、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N(z)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{9}$$

を得る。

問題：密度一様な非圧縮流体中には内部 (重力) 波は存在しない。その理由を説明せよ。

変数分離

以下しばらくの間、ブシネスク近似を施した方程式 (9) を用い、更にプラント-バイサラ振動数 N が一定 (定数) である場合を考える。方程式 (9) がラプラス作用素を含むことより

$$w(x, y, z, t) = w_0 \cos(kx + ly + mz - \omega t) Z(z) \quad (10)$$

のカタチの解 (これは波数ベクトル $\mathbf{k} = (k, l, m)$ を持つ平面波に鉛直依存性を表す関数 $Z(z)$ を掛けたもの) を考える。これを方程式 (9) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} & \omega^2(k^2 + l^2 + m^2) \cos(\cdot) Z - \omega^2 \cos(\cdot) \frac{d^2 Z}{dz^2} - (k^2 + l^2) N^2 \cos(\cdot) Z \\ &= \cos(\cdot) \left(\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{(k^2 + l^2) N^2 - \omega^2(k^2 + l^2 + m^2)}{\omega^2} Z \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る (ただし、 \cos 関数の変数は省略してある)。従って (10) が解であるためには、 z 方向の適当な境界条件に対し、微分方程式

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{(k^2 + l^2) N^2 - \omega^2(k^2 + l^2 + m^2)}{\omega^2} Z = 0 \quad (11)$$

が解を持たねばならない。通常内部波に関しては、 z 方向の流体境界に対し $w = 0$ (従って $Z = 0$) という境界条件を課するのが普通であろう。従って、(10) 式が内部波を表す解であるための条件として、

$$(k^2 + l^2) N^2 - \omega^2(k^2 + l^2 + m^2) \geq 0$$

を得る。すなわち内部重力波は、可能な振動数の上限

$$\omega^2 \leq \frac{(k^2 + l^2) N^2}{k^2 + l^2 + m^2} = \frac{N^2}{1 + \frac{m^2}{k^2 + l^2}} \quad (12)$$

を持つ。

問題：波数ベクトル $\mathbf{k} = (k, l, m)$ を持つ平面波の進行方向とその速度 (すなわち位相速度) を求めよ。

解：平面波を $\cos(kx + ly + mz - \omega t)$ と表現する。波面とは、波の位相因子 $kx + ly + mz - \omega t$ が同じ点を結んで得られる集合 (面) であるから、波の進行 (波面の進行) とは位相因子が同じ点 (の集合) が空間内を移動することに他ならない。平面波の式を

$$\cos(kx + ly + mz - \omega t) = \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}_p t)$$

と表現しておく、位相因子が同じ点は方程式 $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}_p t) = \phi_0$ あるいは $\mathbf{r} - \mathbf{v}_p t = \mathbf{r}_0$ に従って移動する (ただし \mathbf{r} は点 (x, y, z) の位置ベクトル)。従って、波の位相速度とは、波の式を上述のようにベクトル表記した際の \mathbf{v}_p に他ならない。 $\mathbf{v}_p = (\alpha, \beta, \gamma)$ とおいて上式に代入し、 α, β, γ に対する条件を求めると

$$k\alpha + l\beta + m\gamma = \omega$$

を得る。これを満足するような α, β, γ として

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{k\omega}{k^2 + l^2 + m^2}, \frac{l\omega}{k^2 + l^2 + m^2}, \frac{m\omega}{k^2 + l^2 + m^2} \right) = \frac{\mathbf{k}\omega}{|\mathbf{k}|^2}$$

を得るので、結局位相速度 \mathbf{v}_p の定義式として

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k}$$

を得る。

分散関係と伝播特性

以下では、波の波長が領域の鉛直スケールに比べて十分小さい場合を考える。つまり、流体が存在する領域の境界は十分遠方において、波動解を求める際の(鉛直)境界条件を忘れることができるものとする。このとき(10)式における鉛直依存度を表す関数 $Z(z)$ がほぼ定数であるような解が可能であって、解の存在に関する条件式は

$$\omega^2 = \frac{(k^2 + l^2)N^2}{k^2 + l^2 + m^2} = \frac{N^2}{1 + \frac{m^2}{k^2 + l^2}} \quad (13)$$

となる。この式の右辺は $\frac{m^2}{k^2 + l^2}$ のみの関数となっているので、これを $\tan^2 \varphi$ とおく(あるいは同じことであるが、 $\frac{k^2 + l^2}{k^2 + l^2 + m^2} = \cos^2 \varphi$ とおく)と上式は

$$\omega = N \cos \varphi$$

と書くことができる。 $\frac{m^2}{k^2 + l^2}$ が平面波(10)の水平及び鉛直波数(の2乗)の比に他ならない事に注意すると、 φ は平面波(10)の進行方向(位相速度)が水平面となす角度を表していることがわかる。つまり重力波の振動数は、その進行方向に依存して決まるのである。あるいは逆にいうと、重力波の振動数(例えば波源の振動する速さ)が決まっていると、その波動の進行方向(の鉛直軸あるいは水平面となす角)は一意的に決まるのである。これが内部重力波の分散関係になる。

問題：内部重力波の分散関係を表面重力波の分散関係と比較し、その特徴を述べよ。

方程式(9)に従う(鉛直境界条件を忘れた)内部重力波の平面波解を

$$w(x, y, z, t) = w_0 \cos(kx + ly + mz - \omega t) \quad (14)$$

と表現しておき、その伝播特性をもう少し詳しく調べる。まず、式(1)-(5)を用いて、波動の p', ρ', u, v 成分を具体的に計算すると

$$p' = \quad (15)$$

$$\rho' = \quad (16)$$

$$u = \quad (17)$$

$$v = \quad (18)$$

を得る。これから空間の各点において、媒質(流体粒子)の振動方向(すなわち流体粒子の速度 \mathbf{u})が波数ベクトル(あるいは位相速度)と直交する(従ってまた、 \mathbf{u} は波面に平行である)ことがわかる。このことは、内部重力波がいわゆる横波であることを示している。また、 p' と \mathbf{u} の積を考えることにより、波動のエネルギーの伝播方向と位相速度の方向が直交していることがわかる。

問題：式(15)-(18)を実際に計算してみよ。また、流体粒子の速度 \mathbf{u} と波の位相速度 v_p が直交していることを(計算により)示せ。更に、波の進行方向に沿った鉛直平面をとり、その面上における p', ρ', u, v, w の各成分の様子を示す図を描け。

問題：波束のフーリエ積分表示を用いてベクトル表記における群速度の(一般的な)定義式を導け。(ヒント：以前の一次元の場合の群速度に関するメモを参照せよ)

問題：分散関係(13)を用いて、内部重力波の群速度を具体的に計算せよ。また、位相速度と群速度が直交している事を示せ。