

表面重力波

2002.11.18. by 村上

密度 ρ 一定で重力加速度 g のもとに静止している深さ H の非圧縮性流体における (微小) 表面波について考える。

平面波による変数分離

分散関係

$$\omega^2 = g\kappa \tanh \kappa H \quad (1)$$

群速度

局所的に遍在する波束の振舞を考える。初期状態で流体の表面が

$$\eta(x, 0) = f(x) \cos(kx) \quad (2)$$

で表されているとする。ただし $f(x)$ はある有限の領域でのみ 0 でない値を持つ滑らかな関数であるとする。このような波束は一般に k にごく近い波数を持つ波の重ね合わせ (線型結合) により表現できることが知られている。すなわち $f(x)$ のフーリエ積分表示

$$f(x) = \int A_f(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (3)$$

を用いて

$$f(x) \cos(kx) = \operatorname{Re}\{f(x)e^{ikx}\} = \operatorname{Re}\left\{\int A_f(\xi) e^{i(k+\xi)x} d\xi\right\}$$

と表現される (A_f は f のフーリエ変換)。

前節の議論より、初期値が $\cos(kx) = \operatorname{Re}\{e^{ikx}\}$ で与えられる解の時刻 t における振舞は

$$\eta_0(x, t) = \cos(kx - \omega t) \quad (= \operatorname{Re}\{e^{i(kx - \omega t)}\})$$

で与えられることがわかっている。ただし k に対し ω は自由な値をとれるわけではなく、これらは前節でみた関係式 (1) を満たさねばならない。この k と ω の関数関係を $\omega(k)$ で表現することにすれば、波数が k より少しずれた $k + \xi$ という値を持つ波の時刻 t における振舞は、

$$\eta_\xi(x, t) = \operatorname{Re}\{e^{i((k+\xi)x - \omega(k+\xi)t)}\}$$

で表現される。ここで $\omega(k + \xi) \simeq \omega(k) + \frac{\partial \omega}{\partial k}(k)\xi$ と書けることに注意すると上式の $\operatorname{Re}\{\}$ の中は

$$e^{i((k+\xi)x - \omega(k+\xi)t)} = e^{i(kx - \omega(k)t)} e^{i\xi(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}t)}$$

と書くことができる。従って一般の初期値 (2) に対応する解はこれらの重ね合わせ (フーリエ積分) により

$$\eta(x, t) = \int A_f(\xi) \eta_\xi(x, t) d\xi = \operatorname{Re}\left\{e^{i(kx - \omega(k)t)} \int A_f(\xi) e^{i\xi(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}t)} d\xi\right\}$$

と表現される。右辺最後の部分の積分は (3) 式を参照すれば

$$\int A_f(\xi) e^{i\xi(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}t)} d\xi = f\left(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}t\right)$$

と書けることがわかる ($x - \frac{\partial \omega}{\partial k}t = X$ とおいてみよ) ので、初期値 (2) に対応する解 (時刻 t での振舞) は、

$$\eta(x, t) = f\left(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}t\right) \cos(kx - \omega t)$$

となる。ここで式 $f(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}t)$ は、波束の形 (包絡線 f) が速さ $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ で移動することを表わしているため、 $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ を波束の群速度と呼ぶ。