

ゼータ関数に関するメモ

2006.10.15. 村上
(2006.11.11. 加筆)

定義

次の形をした無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad (1)$$

の和を s の関数とみたものを $\zeta(s)$ と書き、ゼータ関数と呼ぶ。

[問] 上の級数は $s > 1$ なる実数 s に対し収束し、 $s \leq 1$ のとき発散することを示せ。(ヒント: 関数 $f(x) = 1/x^s$ の積分を考察せよ。)

オイラーの無限積表示

この節では s は $s > 1$ なる実数とする。無限級数 (1) 式の両辺に $2^{-s} = 1/2^s$ を乗じたもの

$$2^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(2 \cdot 2)^s} + \frac{1}{(2 \cdot 3)^s} + \dots \quad (2)$$

を考える。これは (1) 式の右辺の偶数番目の項のみを取り出した無限級数になっている。そこでこれを (1) 式から減じると、(1) 式の右辺の奇数番目の項を取り出した級数が得られる。すなわち

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1)^{-s} \quad (3)$$

である。同様に (3) 式に更に $1 - 3^{-s}$ を乗じてやると

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \{3(2n+1)\}^{-s} = \sum_m^{(2,3)} m^{-s} \quad (4)$$

を得る。ただし等式の最右辺の記号 $\sum^{(2,3)}$ は、2 及び 3 を約数に含まないようなあらゆる整数 m に渉る和を意味するものとする。同様のことを順次繰り返すことにより、一般に

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) \cdots (1 - p_k^{-s}) = \sum_m^{(2,3,\dots,p_n)} m^{-s} \quad (5)$$

が得られる。ただし p_k は (小さい方から数えて) k 番目の素数であり右辺の和は p_k 以下の素数を約数に含まないような整数全体に涉ってとられる。この式の $k \rightarrow \infty$ の極限を考えよう。(5) 式の右辺を

$$\sum_m^{(2,3,\dots,p_n)} m^{-s} = 1 + \frac{1}{p_k^s} + \dots = 1 + P_k \quad (6)$$

と書いておくと、 P_k は元の級数である (1) 式右辺のうち $1/p_k^s$ 以降の部分から幾つか (実際には無限個) の項を間引いて得られる正項級数なので、関係式

$$0 < P_k < \zeta(s) - \sum_{n=1}^{p_k-1} \frac{1}{n^s} \quad (7)$$

が成立する。(7) 式で $k \rightarrow \infty$ とすれば、最右辺は $\zeta(s) - \zeta(s) = 0$ に収束するので $P_k \rightarrow 0$ が得られる。これより $k \rightarrow \infty$ のとき (5) 式左辺の極限は存在して、その値は 1 になる事がわかる。従って $\zeta(s)$ は

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} \quad (8)$$

と書くことも出来る。これをオイラーの無限積表示と呼ぶ。この表示は、ゼータ関数が素数の全体と密接に関連していることを示唆する。

リーマンのゼータ関数

ゼータ関数の定義式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad (9)$$

において、 s を複素数に拡張することを考える。 $s = \sigma + i\tau$ に対し $|n^{-s}| = |n^{-\sigma} n^{i\tau}| = |n^{-\sigma}|$ である事に注意すれば、 $\sigma = \text{Re}(s) > 1$ である複素数 s に対し (9) 式右辺の級数が絶対収束する。よって $\sigma_0 > 1$ なる σ_0 を一つ固定しておけば $\text{Re}(s) > \sigma_0$ で (9) 式右辺は s の関数として一様収束する。これより、(9) 式が $\text{Re}(s) > 1$ なる複素半平面上で解析関数を定めることが直ちにわかる。これを複素平面全体に拡張するには、ガンマ関数の助けを借りる。ガンマ関数はパラメータ s を持つ (実軸上の) 積分

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (10)$$

で定義される。この (広義) 積分は $\text{Re}(s) > 1$ なる複素数 s に対して絶対収束し s に関する解析関数を定めるが、更に $\text{Re}(s) < 1$ なる領域にも解析接続され、 $s = 0, -1, -2, \dots$ を極とする有理型関数となる。またガンマ関数に関する良く知られた関係式として

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (11)$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi} \quad (12)$$

がある。(11) 式より例えば $\Gamma(n+1) = n!$ であることが分かるので、ガンマ関数は自然数に関して定義される階乗 ($n!$) の複素数への拡張でもある。

[問題] (11) 式及び $\Gamma(1) = 1$ を示せ。また $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を示せ。

[問題] (12) 式を示せ。(ヒント: $\Gamma(s), \sin \pi s$ の無限積表示を用いる。ガンマ関数メモ参照。)

これらのガンマ関数の性質を既知とすればゼータ関数の $\text{Re}(s) < 1$ への拡張は比較的容易に理解できる。(10) 式の積分における x を nx で置き換えると、

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx \quad (13)$$

を得る。これを n について 1 から ∞ まで足し合わせる事で

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx \quad (14)$$

が得られる。この右辺の積分は $s > 1$ なる実数 s に対しては (有限確定値として) 確かに存在することを注意しておく。この表示から、次の定理が得られる。

[定理] $\text{Re}(s) > 1$ なる複素数 s を一つ固定する。複素平面の実軸の正の部分の補集合 $C - R_+$ において、 $(-z)^{s-1}$ の値を $e^{(s-1)\log(-z)}$, $-\pi < \text{Im}z < \pi$ と定義しておく、

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} dz \quad (15)$$

が成立する。ただし、積分経路 C は複素平面における実軸の正の部分の上側を (実軸に沿って) 無限遠方から原点方向に向かい、原点のまわりを小さな弧 (半径 $< 2\pi$) で迂回した後、実軸の下側を再び無限遠方に向かうような路であるとする (図 1: ただしこの条件を満たしていればその具体的な形状は問わない)。

[証明]

図 2 に示すような閉曲線 $C' + C''$ 上における複素積分

$$\int_{C'+C''} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} dz \quad (16)$$

を考える。関数 $e^z - 1$ の零点が虚数軸上に現れ、被積分関数は $z = \pm 2m\pi i$ に極を持つ。積分路 $C' + C''$ の内側にはそれらの極は含まれないので、任意の複素数 s に対して上の積分が存在し、その値が 0 になることは明ら

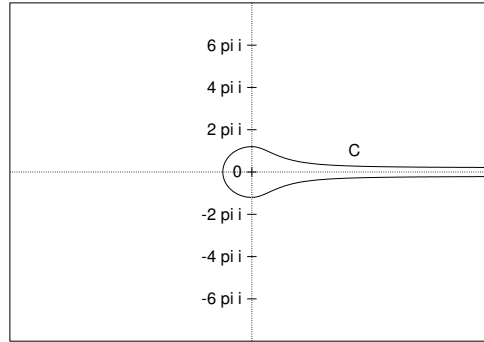


図 1

かである。また、外側の路 C'' 上の積分と内側の路 C' 上の積分について $\int_{C''} = -\int_{C'}$ が成立する。そこで、それらの値が $\text{Re}(s) > 1$ なる s に対しては $\zeta(s)$ と関連づけられることを示す。その為に、積分路を連続的に変形し、その極限に於いて内側の路 C' が実軸上の正の部分の往復に一致するようにする。(このとき外側の路 C'' が定理に云う経路 C になることは明らかであろう。また、極や正の実軸を横切らない限り C の形状は任意である。) このとき z の偏角に対する条件より、 $z = x + iy$ としておくと、実軸の上岸においては $(-z)^{s-1} = x^{s-1} e^{-i\pi(s-1)}$ 、下岸では $(-z)^{s-1} = x^{s-1} e^{i\pi(s-1)}$ である。また、 $\text{Re}(s) > 1$ であれば原点を中心とする小さな半径 r の円弧上の積分は $r \rightarrow 0$ のとき $\rightarrow 0$ となる。よって、積分路 C' 上における積分について

$$\begin{aligned} \int_{C'} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-i\pi(s-1)}}{e^x - 1} dx - \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{i\pi(s-1)}}{e^x - 1} dx \\ &= (e^{-i\pi(s-1)} - e^{i\pi(s-1)}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ &= -2i \sin(s-1)\pi \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

が成立する。ここで $\sin(s-1)\pi = -\sin s\pi$ 、 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin s\pi$ 及び(14)式に注意すれば経路 C 上の積分に関し定理を得る。

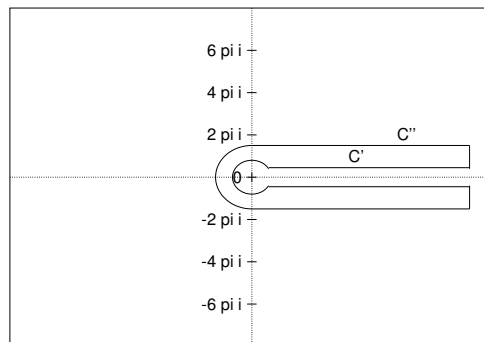


図 2

この定理より、(9)式で定義されるゼータ関数が $\text{Re}(s) > 1$ において(15)式の右辺と等しいことがわかる。しかるに(16)式の右辺の積分自体は任意の複素数 s に対して定義され、(s について) 全平面で正則な関数(整関数)を与える。一方、 $\Gamma(1-s)$ は $s = 1, 2, 3, \dots$ に極を持つ有理型関数なので両者の積である(15)式右辺は $s = 1, 2, 3, \dots$ に極を持つ可能性がある。しかるに、 $\zeta(s)$ が $\text{Re}(s) > 1$ で正則であることは既に分かっているので、整数 $n = 2, 3, \dots$ に対応する極は積分(16)の零点と打ち消し合っていないなければならない。(実際

$$\int_C \frac{(-z)^{n-1}}{e^z - 1} dz = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

である。) 一方 $s = 1$ に対しては

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{e^z - 1} dz = 1 \quad (17)$$

であるので、 $s = 1$ に対応する極は残る。ガンマ関数に関する知識から、 $-\Gamma(1-s)$ における $s = 1$ は 1 位の極であってその留数は 1 である事がわかるので、 $\zeta(s)$ における $s = 1$ もまた 1 位の極であり、その留数は 1 である。結局、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s = 1$ にのみ 1 位の極を持つ複素平面上の有理型関数に解析接続出来ることがわかる。

[問題] (17) 式を示せ。

(9) 式あるいは (8) 式の拡張として得られる、複素平面全体で定義された有理型解析関数 $\zeta(s)$ を、リーマンのゼータ関数と呼ぶ。

特別な s に対するゼータ関数の値

整数 $n \geq 0$ に対する $\zeta(-n)$ の値は比較的簡単に求めることが出来る。そのためには $1/(e^z - 1)$ のローラン級数展開

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^{2k-1} \quad (18)$$

を用いるのが便利である。ただし、 B_k はベルヌーイ数である。

[問題] $1/(e^z - 1)$ の原点におけるローラン展開を具体的に求めよ。(ベルヌーイ数 B_k は、具体的にはその過程で求める。)

(15) 式の s に $-n$ を代入すると、 $\Gamma(1+n) = n!$ であることより、

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} dz \quad (19)$$

が得られる。この表示に上の $1/(e^z - 1)$ の展開を代入してやると、被積分部分は

$$\frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} = z^{-n-2} - \frac{1}{2} z^{-n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^{-n+2k-2} \quad (20)$$

となるので、積分を実行した際に残るのは z のべき乗の指数が -1 に等しいところだけである。これより $\zeta(-n)$ の値は (18) 式の展開における z^n の項の展開係数に $(-1)^n n!$ を掛けたものに等しいことがわかる。よって、

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= -\frac{1}{2} \\ \zeta(-2m) &= 0 \\ \zeta(-2m+1) &= (-1)^m \frac{B_m}{2m} \end{aligned}$$

が得られる。特に負の偶数に対するゼータ関数の値は 0 になる。これをゼータ関数の自明な零点と呼ぶ。

関数等式

前々節で導いた積分表示 (15) を用いて、ゼータ関数に対する関数等式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \quad (21)$$

を示す。証明には前々節で用いた積分経路 C' に加え、原点を中心とする一辺の長さが $2(2n+1)\pi$ である正方形 C_n を組み合わせて用いる (図 3)。これらを繋ぎ合わせた $C_n + C'$ は、実軸の正の部分 C' により迂回しつつ正方形 C_n の辺上を一周する経路である。前々節でもみたように、積分 (16) の被積分関数は虚数軸上の点 $z = 2m\pi i$ に一位の極を持つが、その留数は $(\mp 2m\pi i)^{s-1}$ である。よって積分路 $C_n + C'$ において

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n + C'} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = \sum_{m=1}^n [(-2m\pi i)^{s-1} + (2m\pi i)^{s-1}] = 2 \sum_{M=1}^n (2m\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \quad (22)$$

を得る。ここで $n \rightarrow \infty$ の極限を考えるのだが、それに先立ち、 C_n 上での上の積分の値を評価しておこう。 C_n は常に関数 $e^z - 1$ の零点から離れた部分を通るので C_n 上で $|e^z - 1|$ は下から評価でき、 n の値に無関係に $|e^z - 1| > \delta$ となる正数 δ が存在する。一方 $\text{Re}(s) = \sigma$ としておくと、積分経路 C_n 上では $|(-z)^{s-1}|$ は上から評価できて

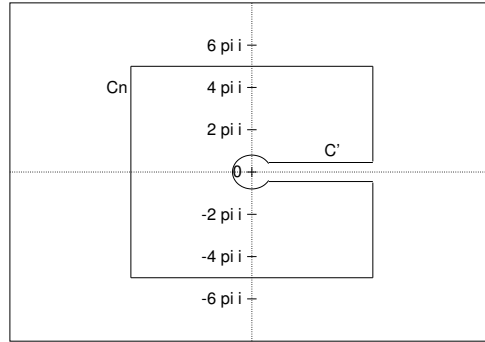


図 3

$|(-z)^{s-1}| \leq \alpha n^{\sigma-1}$ を満たすような (n に依存しない) 定数 α を選ぶことが出来る。また、積分経路の長さも n の定数倍によって押さえられる。よってある定数 A があって

$$\left| \int_{C_n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| \leq \int_{C_n} \left| \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right| |dz| \leq A n^\sigma$$

と出来る。従って $\sigma < 0$ であれば、 C_n 上の積分は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。よって $C_n + C'$ 上の積分は $-C$ 上の積分に収束し、前々節の定理から (22) 式の左辺は $n \rightarrow \infty$ のとき $\zeta(s)/\Gamma(1-s)$ に収束する。一方、 $\sigma < 0$ のとき $\sum_1^\infty m^{s-1}$ は $\zeta(1-s)$ に収束するから、(22) 式の右辺は $2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \zeta(1-s)$ に収束する。すなわち

$$\zeta(s)/\Gamma(1-s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2) \zeta(1-s)$$

が成立する。ここでの証明は $\text{Re}(s) < 0$ に対してのみ有効であるが、この式の両辺は共に複素平面全体で定義された整関数として存在するので、一致の定理より、この関係式は複素平面全体で成立する。

関数等式 (21) により、ゼータ関数の $\text{Re}(s) < 0$ における値と $\text{Re}(s) > 1$ における値が直接的に結びつけられる。これには等価な幾つかの別の表示もあって、例えば $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ を用いると

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s) \quad (23)$$

が得られる。更に

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad (24)$$

とおけば $\xi(s)$ は整関数で

$$\xi(s) = \xi(1-s) \quad (25)$$

が成立する。

[問題] (23) 式及び (25) 式を示せ。(ヒント: ガンマ関数メモのルジャンドルの倍公式参照。)

$\zeta(s)$ の無限積表示

この節ではリーマンゼータ関数の無限積表示を求める。(無限積表示の一般論についてはメモ『Weierstrass の因数分解定理と有理型関数』を参照せよ。)

『Weierstrass の因数分解定理と有理型関数』で触れたように、整関数 $f(z)$ の位数とは、 $|z| = r$ 上での $|f(z)|$ の最大値を $M(r)$ と書くとき

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

で定義され、それはまた任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、 r を十分大きくとれば、

$$M(r) \leq e^{r^{\lambda+\varepsilon}}$$

が成立するように出来る最小の数 λ のことであった。この定義と、ガンマ関数に関するスターリング (Stirling) の公式

$$\log \Gamma(z) = \frac{1}{2} \log 2\pi - z + \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z + J(z)$$

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta$$

から、前節で導入した $\xi(s)$ は位数 1 の整関数であることがわかる。従って、『Weierstrass の因数分解定理と有理型関数』で触れたアダマール (Hadamard) の因数分解定理より、 $\xi(s)$ に対して、

$$\xi(s) = e^{a+bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \quad (26)$$

という無限積表示が成立する。ただし、 a, b は定数で、積は $\xi(s)$ の総ての零点 (重複度を込めて考える) にわたってとられる。

[注意] $\xi(s)$ は、 $\zeta(s)$ の自明な零点と極が、ガンマ関数の極と因数 $s(s-1)$ とによって打ち消されることで整関数となっている。従って $\xi(s)$ の零点とは、 $\zeta(s)$ の零点から自明なものを除いた全体である。

定数 a, b を決定しよう。まず (26) 式において $s=0$ とおくと $\xi(0) = e^a$ であるが、 ξ の定義式 (24) より $\xi(0) = -\zeta(0) = 1/2$ なので、

$$e^a = \frac{1}{2}$$

である。よって

$$\zeta(s) = \frac{e^{bs} \pi^{s/2}}{s(s-1)\Gamma(s/2)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

$$= \frac{e^{(b+(\log \pi)/2)s}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

となる。この両辺の対数微分をとると

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b + \frac{\log \pi}{2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \quad (27)$$

を得る。

ここで、ガンマ関数の無限積表示

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$$

の対数微分

$$-\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \gamma + \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s+n} - \frac{1}{n} \right\}$$

を考え、 $s=1$ とおいてやると $\Gamma'(1) = -\gamma$ (ただし、 γ はオイラーの定数) を得る。同様にゼータ関数の関数等式 (21) の対数微分をとり

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log 2\pi + \frac{\pi \cos \frac{\pi s}{2}}{2 \sin \frac{\pi s}{2}} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \quad (28)$$

$\zeta(s)$ の $s=1$ のまわりでのローラン展開

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (s-1)^m$$

から得られる

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \gamma - (\gamma^2 - 2c_1)(s-1) + \dots \quad (29)$$

に注意して(28)式右辺の $s \rightarrow 0$ の極限をとると $\zeta'(0)/\zeta(0) = \log 2\pi$ を得る。これらの値を用いて(27)式で $s = 0$ とおいてやれば

$$b + \frac{\log \pi}{2} = \log 2\pi - 1 - \frac{\gamma}{2}$$

が得られる。

[問題] $\zeta(s)$ の $s = 1$ のまわりにおけるローラン展開から $\zeta'(s)$ を計算し、更に $\zeta'(s)/\zeta(s)$ の $s = 1$ のまわりでの表示(29)を示せ。

[問題] 上の事実を利用して(28)式右辺の $s \rightarrow 0$ での極限值を求めよ。

こうして $\zeta(s)$ の無限積表示

$$\zeta(s) = \frac{e^{(\log 2\pi - 1 - \gamma/2)s}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \quad (30)$$

を得る。ただし先の注でも示したように、 ρ に関する積はリーマンゼータ関数の自明でない零点全体に涉ってとられる。

ゼータ関数の自明でない零点

素数分布との関連