

整関数と有理型関数

x を不定元とする多項式 (polynomial)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

は、しばしば整式 (integral expression) とも呼ばれる。二つの整式の商の形に書かれるものが有理式 (rational expression) であり、それを未知変数 x の関数とみたものが有理関数 (rational function) であった。これらの概念は、複素変数 z の関数 (複素関数) にも容易に拡張される。複素関数論的には、整関数 (integral function) とは、複素平面全体 ($z = \infty$ を除く) で正則になる複素関数 $f(z)$ のことを云う (それ故整関数はしばしば entire function と呼ばれる)。従って、整関数 $f(z)$ は複素平面の任意の点 $a (\neq \infty)$ の近傍で、テイラー級数

$$f(z) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

に展開される。多項式は原点における $f(z)$ のテイラー級数が有限項で切れたものと解釈され、この意味で確かに整関数となっている。整式はしばしば有理整関数 (rational integral function) と呼ばれ、有理整関数でない整関数を特に区別したい場合には、超越整関数 (transcendental integral function) と呼ぶ。良く知られている初等的な超越整関数として $e^z, \sin z, \cos z$ 等がある。こうした整関数を用いて、それらの商の形に書かれる関数が、複素解析的な意味での有理関数、すなわち有理型関数 (meromorphic function) である。有理関数の大域的な性質を把握するには、その分子分母の整式を因数分解して、それらの零点を調べるのが重要であった。全く同様の事が、有理型関数に関しても云える。つまり、複素解析的な文脈に於いても、有理型関数の性質はその分子分母に現れる整関数の零点の様子によって特徴づけられるのである。このことを理解するためには、まず超越整関数に対しても多項式 (有理整関数) と同様の因数分解が可能であることを知る必要がある。これを保証するのが Weierstrass の因数分解定理 (あるいは Weierstrass 無限積表示) であるが、本稿ではまずこの定理の証明を行い、続いて幾つかの具体的な関数の無限積表示を求める。こうした知識は、ガンマ関数やゼータ関数の理解にとっても重要である。

正則関数の無限乗積

最初に、複素数の無限積

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

を考える。このような積の値は、(無限級数の場合と同様に) 部分積 $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ をまず考え、その $n \rightarrow \infty$ の極限をとる事により計算されるべきであろう。その際、 P_n が 0 以外の有限の値 P に収束するならば、上の無限積は収束し、その値は P であるという。また、収束しない無限積は発散するという。ただし、 p_n の中に零に等しいものがあると、その積は残りの因数に関係なく零になってしまうので、その場合、もし零になる項が有限個であれば、それを除いた残りの因数の無限積の収束発散により元の無限積の収束発散を定義する。また、零となる p_n が無限にある場合や、各 p_n が零でないにもかかわらず $P_n \rightarrow 0$ となる場合には、無限積は発散すると約束しておく。

このように定義しておけば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \neq 1$ の場合には明らかに上の無限積は発散することがわかる。つまり、無限積が収束するためには $p_n \rightarrow 1$ となる必要がある。このことを考慮し、 $p_n = 1 + a_n$ とおいて、無限積を

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{1}$$

の形式に書いておくと便利である。このとき、無限積の収束発散は無級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1 + a_n) \tag{2}$$

の収束発散に還元して調べることが出来る。(ただし、 Log は対数関数の主値、つまり各項に対し $-\pi < \text{Im}(1 + a_n) \leq \pi$ である枝をとるものとする。) 実際、上の級数が収束するとき、その値を q とおくと、指数関数の連続性より、無限乗積 (1) は $p = e^q$ に収束する。一方逆に無限積 (1) が値 p に収束するなら、部分積 P_n に対し、 $\text{Log} P_n = \sum_{k=1}^n \text{Log} p_k \rightarrow \text{Log} p$ となって、 $\sum_{k=1}^n \text{Log} p_k$ の収束が保証される。(実際には、 \log の多価性があるので偏角に対する議論が必要であるが、級数が収束することより $\log p_n \rightarrow 0$ でなければならず、従ってある n_0 より

先の n に対しては $\log p_n = \text{Log} p_n$ である。) 以上をまとめると、

[定理 1] $1+a_n \neq 0$ とするとき、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ が収束するための必要十分条件は、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1+a_n)$ が収束することである。

が得られる。ここで更に無限積が絶対収束するとは、対応する無限級数が収束することと定義しておく、上の級数の収束判定に関し、次の定理が成立する。

[定理 2] 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ が絶対収束するための必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することである。ただし、無限積が絶対収束するとは、対応する無限級数が収束することとする。

[問題 1] 定理 2 を示せ。

$p_n(z) = 1+a_n(z)$ が複素平面のある領域 D で定義された関数である場合には、関数の無限乗積

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n(z))$$

を考えることが出来る。この場合にも、無限積の一樣収束に対応する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1+a_n(z))$ が一樣収束で定義する。このとき次の定理 3,4 が成立する。

[定理 3] $p_n(z)$ が領域 D で正則であり、 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n(z)$ が一樣に収束するならば、 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n(z)$ は D で正則である。

[定理 4] $a_n(z)$ が領域 D で正則であり、 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n(z))$ が一樣に絶対収束するならば、 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n(z))$ は D で正則である。

[問題 2] 定理 3,4 を示せ。

Weierstrass の因数分解定理

整関数とは複素平面全体で正則になる関数のことであつた。多項式以外の良く知られた整関数として $e^z, \sin z, \cos z$ があつた。特に指数関数 e^z は零点を持たない整関数である。それ故、整関数 $g(z)$ に対して、 $f(z) = e^{g(z)}$ は零点を持たない整関数になる。一方逆に $f(z)$ が零点を持たない整関数であれば、ある整関数 $g(z)$ があつて $f(z) = e^{g(z)}$ の形に書くことが出来る。実際それには $g(z) = \log f(z)$ とおけば良いのであるが、 \log の多価性に留意する必要がある。そのためには、いささか技巧的ではあるが

$$g(z) = \text{Log} f(0) + \int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

とおけば良い。

[問題 3] 上に定義した $g(z)$ が全平面で正則であること及び、 $f(z)e^{-g(z)} = 1$ が成立することを示せ。(よつて、この $g(z)$ が求めるべきものである。)

以上の準備の下に、整関数の無限乗積表示 (因数分解) を議論しよう。まず、 $f(z)$ が有限個の零点を持つ場合には、その零点を重複度を考慮して

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (3)$$

と並べておく。このとき多項式

$$(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$$

ば、 $z = a_1, a_2, \dots, a_n$ にのみ零点を持つ関数になるが、それに $e^{g(z)}$ (ただし $g(z)$ は整関数) を乗じたものも同様の関数になるので、 $f(z)$ の一般形は

$$f(z) = e^{g(z)}(z-a_1)\cdots(z-a_n)$$

と書かれる。ただし、このままでは、 $n \rightarrow \infty$ とするのに不便なので、右辺の各項を $-a_n$ で除する。その際原点にある零点 (すなわち $a_k = 0$ の項) は特別扱いする必要がある。これらの事を考慮すると結局、ある非負整数 m と整関数 $g(z)$ があつて

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \quad (4)$$

とかける事になる。次に、 $f(z)$ が無限個の零点を持つ場合を考えよう。このとき零点を表す点列 a_n 自体は $n \rightarrow \infty$ のとき $|a_n| \rightarrow \infty$ となっていると考えて良い ([問題 4])。 (4) 式の一般化は、形式的に

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad (5)$$

と書ける。このときもし、 $\sum_{n=1}^{\infty} |1/a_n|$ が収束するなら、この右辺は任意の閉円盤 $|z| < R$ で絶対かつ一様に収束することになり、この表示は正しい。しかし、 $|a_n| \rightarrow \infty$ であるからといって、 $\sum_{n=1}^{\infty} |1/a_n|$ の収束が保証される訳ではないので、より一般の場合にも通用するように無限積の各因子 $(1 - z/a_n)$ に補正因子 $e^{q_n(z)}$ を掛けて、収束しやすくする事を考える。つまり、

$$p_n(z) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{q_n(z)}$$

とにおいて $p_n(z)$ の無限積を考えなのである。このとき $\text{Log}(1 - z)$ の級数展開より

$$\text{Log} p_n(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k + q_n(z)$$

に注意して

$$q_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k$$

ととれば

$$\text{Log} p_n(z) = - \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k$$

である。また、 a_n については $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \infty$ が成り立つのであるから、任意の $r > 0$ に対して、

$$n \geq k \quad \text{ならば} \quad |a_n| > 2r$$

が成立するような整数 k をとることが出来る。このとき、不等式

$$\begin{aligned} |\text{Log} p_n(z)| &= \left| \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k \right| \leq \frac{1}{m_n+1} \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^k < \frac{1}{m_n+1} \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \left| \frac{r}{a_n} \right|^k \\ &= \frac{1}{m_n+1} \left| \frac{r}{a_n} \right|^{m_n+1} \frac{1}{1 - |r/a_n|} < \frac{2}{m_n+1} \left| \frac{r}{a_n} \right|^{m_n+1} \end{aligned}$$

が成立するから、任意の $r > 0$ に対して、

$$\sum \frac{2}{m_n+1} \left| \frac{r}{a_n} \right|^{m_n+1} < +\infty \quad (6)$$

となるように m_n を選べば

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{q_n(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}} \quad (7)$$

は $|z| < \infty$ の各点で一様に絶対収束するように出来る。つまり、(7) 式はある整関数を定め、その零点の全体は重複度 (位数) を考慮に入れて数列 $\{a_n\}$ に一致するのである。更に、 $z=0$ を m 位の零点として付け加えたければ、(7) 式に z^m を掛ければ良い。以上の結果を総合して、次のワイエルシュトラスの因数分解定理を得る。

[定理 5] 整関数 $f(z)$ の原点の零点としての位数を $m (m \geq 0)$ 、原点以外の零点をその位数も含めて $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表す。このとき

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}} \quad (8)$$

とかける。ここで、積は 0 でない零点 a_n 全体に涉つてとられ、 m_n はある整数列、 $g(z)$ はある整関数である。

[問題 4] 整関数 $f(z)$ が無限個の零点 a_n を持つなら $a_n \rightarrow \infty$ である。(ヒント：整関数が $|z| < +\infty$ の範囲に集積する零点を持つなら、それは定値関数 0 に一致する。)

[問題 5] $a_n \rightarrow \infty$ となる点列 $\{a_n\}$ に対し、(6) 式を収束させるような数列 $\{m_n\}$ が必ずとれることを示せ。(ヒント： $m_n = n$ とおけばよい。)

整関数の無限積表示

前節で得たワイエルシュトラスの因数分解定理の使い方を理解するために、すべての自然数 $n=1,2,3,\dots$ において、一位の零点を持つ整関数をつくってみよう。すなわち、 $a_n=n$ の場合を考える。このとき

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = +\infty$$

であるから、無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)$$

が収束しないような z が存在するが、これに収束因子 z/n を乗じた

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}$$

は、任意の $r > 0$ に対して $|z| < r$ で一様に絶対収束する。実際、(6) 式左辺で $a_n = n$ として、全ての n に対して $m_n = 1$ とおいてみると

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{1+1} \left|\frac{r}{n}\right|^2 = r^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

となって、無限積の収束条件が満たされることがわかる。

上の簡単な例からわかるように、与えられた零点の分布（すなわち点列 a_n ）に対して、(8) 式（あるいは(7) 式）を収束させるための整数列 m_n が定数列（すなわち全ての n に対して共通の値 h ）にとれるなら、そのような非負整数 h には最低値がある。すなわち(6) 式の判定条件において、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{r}{a_n}\right|^{h+1} < +\infty$$

を満足させる最低整数 h が存在する（勿論、 $\{m_n\}$ を定数列に出来ない場合には、そのような最低整数は無い）。このような最低整数 h は、 $f(z)$ そのものというより、その零点の集合 $\{a_n\}$ に対して決まることに注意しよう。そこで、この非負整数 h を用いた無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{h}\left(\frac{z}{a_n}\right)^h} \quad (9)$$

を、点列 $\{a_n\}$ に関する基本積と呼び、非負整数 h をその種数という。（ $\{m_n\}$ を定数列に出来ない場合には、その種数は無限大であるという。）

整関数 $f(z)$ を完全に決定するには、その零点に関する基本積(9) だけでは不十分で、(8) 式における $g(z)$ を決定する必要がある。 $f(z)$ が、その零点の基本積に関して有限な種数を持つだけでなく、更に(8) 式の表示における $g(z)$ を有限次数の多項式に出来る場合、整関数 $f(z)$ は有限種数であるといい、 $g(z)$ の次数と基本積の種数のうち大きい方を $f(z)$ の種数と云う。従って、種数 0 の整関数とは

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

の形に書ける関数 $f(z)$ のことであり、更に $\sum 1/|a_n| < +\infty$ が成立するようなものである。また、種数 1 の整関数とは

$$f(z) = Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}$$

と書けて、 $\sum 1/|a_n|^2 < +\infty$ かつ $\sum 1/|a_n| = +\infty$ であるような関数 $f(z)$ か、もしくは

$$f(z) = Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

と書けて、 $\sum 1/|a_n| < +\infty$ かつ $\alpha \neq 0$ であるような関数 $f(z)$ のことである。

以上の知識の応用として、 $\sin \pi z$ の無限積表示を考える。その零点は整数 $z = \pm n$ である。また $\sum 1/n$ は発散し、かつ $\sum 1/n^2$ は収束する。従って、その零点から得られる基本積の種数は 1 であり、

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \quad (10)$$

という表示を持つことがわかる。次に $g(z)$ を決めよう。その為に上式の対数をとって z で微分すると

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

を得る。しかるに、 $\cot \pi z$ の部分分数展開

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \quad (11)$$

に注意すれば、 $g'(z) = 0$ がわかる。すなわち $g(z)$ は定数である。その値を求めるために、(10) 式の両辺を z で除して $z \rightarrow 0$ とすると、

$$e^{g(0)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

が得られる。以上をまとめて、 $\sin \pi z$ の無限積表示

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \quad (12)$$

を得る。また、この式で n に関する因子と $-n$ に関する因子をまとめると

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (13)$$

という更に簡単な表示を得る。

[問題 6] (11) 式 ($\cot \pi z$ の部分分数分解) を示せ。

[問題 7] $\sin \pi z$ の整関数としての種数はいくらか?

ガンマ関数

前節でみたように、 $\sin \pi z$ は全ての整数を零点として持つような関数であって、しかもそのような関数の中で最も簡単なものであった。ここでは、正の整数だけ、あるいは負の整数だけを零点として持つような整関数を導入する。例えば、全ての負の整数（だけ）を零点に持つような関数の中で最も簡単なものは、対応する基本積

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (14)$$

である。この式において z を $-z$ で置き換える事により $G(-z)$ が全ての正整数（だけ）を零点に持つ関数であることがただちにわかる。また、両者の積と $\sin \pi z$ の無限積表示 (12) を比べて

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \quad (15)$$

が得られる。

一方 $G(z)$ の作り方より、関数 $G(z-1)$ の零点は $G(z)$ の零点を（複素平面上で）1 だけ右側に移動させたものであることがわかる。つまり $G(z-1)$ は、原点及び全ての負整数を零点として持つ関数である。よって

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)} G(z)$$

と書ける筈である。 $\gamma(z)$ を決めるために両辺の対数をとって微分すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \quad (16)$$

を得る。ここで左辺の n を $n'+1$ で置き換えると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) &= \sum_{n'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n'} - \frac{1}{n'+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

を得るが、この最後の級数の和は 1 になるので、この式と先に得られた (16) 式を見比べると $\gamma'(z) = 0$ でなければならない。従って $\gamma(z)$ は定数である。そこで、その値を γ とおいてやると、 $G(z)$ は関係式

$$G(z-1) = e^{\gamma} z G(z) \quad (17)$$

を満たす。ここで更に $H(z) = G(z)e^{\gamma z}$ とおくと、 $H(z)$ の満たす関数等式

$$H(z-1) = zH(z)$$

が得られる。また (17) 式で $z=1$ とおくと

$$G(0) = e^{\gamma} G(1)$$

であるが、 $G(z)$ の定義式より $G(0) = 1$ 及び $G(1)$ が決まるので

$$e^{-\gamma} = G(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}$$

が得られる。この右辺の第 n 項までの部分積を具体的に求めてやると

$$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \cdot e^{-(1+1/2+\dots+1/n)} = (n+1)e^{-(1+1/2+\dots+1/n)}$$

を得るので、その対数をとることにより

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \quad (18)$$

が得られる。この定数はオイラーの定数と呼ばれ、その近似値は 0.57722 である。

上で導入した $H(z)$ は $z=0, -1, -2, \dots$ を零点とする整関数で、関数等式 $H(z-1) = zH(z)$ を満たすのであった。そこで関数 $\Gamma(z) = 1/H(z)$ を考えると、それは $z=0, -1, -2, \dots$ を (一位の) 極とする有理型関数であって、関数等式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (19)$$

を満たす。このようにして定義される関数 $\Gamma(z)$ をガンマ関数と呼ぶ。より明示的に書けば

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \quad (20)$$

である。これが関数論的なガンマ関数の定義である。このような定義を採用することの利点は、これによりガンマ関数の大域的な性質が (定義から直ちに) 明確になる事である。実際この定義によれば、 $\Gamma(z)$ の極は自明であり、また $H(z) = 1/\Gamma(z)$ が整関数である (従って極を持たない) ことより、 $\Gamma(z)$ は零点を持たない関数であることもわかる。

更に、基本積 $G(z)$ に対する関係式 (15) から関係式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (21)$$

が得られ、これより $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ が直ちにわかる。また、定義式 (20) より $z\Gamma(z) = 1/G(z)$ は $z=0$ で正則であり、これと (21) 式より $\Gamma(1) = 1$ がわかる。これから (21) を用いて順次 $\Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 1 \cdot 2, \Gamma(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots$ で、一般に正の整数 n に対して

$$\Gamma(n+1) = n!$$

を得る。こうしてガンマ関数の基本的な性質が無限積表示を採用することで明瞭になる。

無限積表示から得られるガンマ関数の性質をもう少し調べよう。(20) 式の対数を取り

$$\log \Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z}{n} - \log \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right\}$$

微分し

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right\}$$

更に微分すると

$$\frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \quad (22)$$

という非常に簡単な式が得られる。ここで和はガンマ関数の極全体に涉ってとられている事に注意しよう。つまりこの式は $\log \Gamma(z)$ の二階導関数に関する部分分数表示を与えている。この簡単な関係式はガンマ関数の幾つかの性質を導くのに有用である。

一方、 $z=0, -1, -2, -3, \dots$ に一位の極を持つ有理型関数というガンマ関数の構成法より、 $\Gamma(z+1/2)$ の極は $z=-1/2, -3/2, -5/2, \dots$ にあり、 $\Gamma(2z)$ の極は $z=0, -1/2, -1, -3/2, -2, -5/2, -3, \dots$ にあることがわかる。つまり $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$ と $\Gamma(2z)$ は全く同じ極を持つ。従って両者の間には簡単な関係があることが予想される。実際 $\log \Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$ の二階微分を計算すると (22) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n+1/2)^2} \\ &= 4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n+1)^2} \right] = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+m)^2} \\ &= 2 \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \end{aligned}$$

が得られる。これを積分して

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = e^{az+b}\Gamma(2z)$$

となるが、 $z = 1/2, z = 1$ を代入して積分定数 a, b を決めてやると、結局

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$$

を得る。これをルジャンドルの 2 倍公式と呼ぶ。

[問題 8] 上の積分定数 a, b を実際に計算してみよ。

[問題 9]

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}$$

を示せ。

[問題 10] 無限積によるガンマ関数の定義 (20) が、通常定義

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$$

と一致することを示せ。

Hadamard の因数分解定理

関数 $f(z)$ に対し、 $|z| = r$ 上での $|f(z)|$ の最大値を $M(r)$ と書くことにする。このとき、整関数 $f(z)$ の位数を

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

で定義する。任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、 r を十分大きくとれば、

$$M(r) \leq e^{r^{\lambda+\varepsilon}}$$

が成立するように出来る最小の数が λ である。例えば $g(z)$ を k 次の多項式とすると $f(z) = e^{g(z)}$ の位数は k である。また、指数関数の性質 $e^{h(z)}e^{h(z)} = e^{g(z)+h(z)}$ より、積の位数は各々の因数の位数の大きい方で押さえられることもすぐわかる。これらのことより整関数の位数は基本積を考えた際に導入した整関数の種数の概念と密接な関係を持つことが予想される。実際次の定理が成立する。

[定理 6] 整関数の種数 h と位数 λ の間には次の関係がある。

$$h \leq \lambda \leq h + 1$$

これはアダマール (Hadamard) の定理と呼ばれるものであるが、その証明はここでは行わない (興味のある方は L.V. Ahlfors "Complex Analysis", 辻正次『複素函数論』等を見たい)。これから、整関数の位数が非整数であれば、その種数が一意に決まることがわかる。一方、位数が整数の場合には場合分けが必要になる。いずれにせよ、整関数の位数がわかると、そこから種数わかるのでワイエルシュトラスの因数分解定理における多項式の最高次数がわかる。つまり、有限位数の場合には、この定理により因数分解定理が精密化される。これをアダマール (Hadamard) の因数分解定理と云う。