

大気大循環の古典的エネルギー論

2008.12.17. 村上

支配方程式系

圧力座標での大気の運動の支配方程式 (プリミティブ方程式系) を再掲する。

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{\tan \varphi}{a} uv - fv = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + F_\lambda \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{\tan \varphi}{a} u^2 + fu = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + F_\varphi \quad (2)$$

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \alpha \quad (3)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{Q}{C_p} \quad (4)$$

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5)$$

ただし、球面圧力座標におけるラグランジュ微分 D/Dt は、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

であり、従属変数として、東西及び南北風速 u, v 、圧力速度 $\omega (= dp/dt)$ 、ジオポテンシャル $\Phi (= gz)$ 、比容 $\alpha (= 1/\rho)$ 及び温位 ϑ をとっている。比容 α は状態方程式により大気温度 T 及び圧力 p と関係式

$$p\alpha = RT \quad (6)$$

によって結びつけられ、温位 ϑ は

$$\vartheta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \quad \left(= \frac{T}{\Pi(p)} \right) \quad (7)$$

で定義される。ここに、 R は (乾燥大気) の気体定数、 $\kappa = R/C_p$ は R と定圧比熱 C_p の比、 p_0 は温位を定義する際の基準圧力 (通常 1000 hPa) であり、 $\Pi(p) = (p/p_0)^\kappa$ はエクスポネンシャル関数と呼ばれる。また、 a は地球の半径、 g は重力加速度で、コリオリパラメータ f は地球の自転角速度を Ω とし $f = 2\Omega \sin \varphi$ で表され、 F_λ, F_φ により摩擦力、 Q により大気に与えられる単位体積あたりの加熱率 (いわゆる非断熱加熱) を表している。地球大気では $C_p = 1004 [\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}]$, $R = 287.04 [\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}]$ ($\kappa \doteq 2/7$) で、 $a = 6.371 \times 10^6 [\text{m}]$, $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} [\text{rads}^{-1}]$, $g = 9.8 [\text{msec}^{-2}]$ である。

大気の大規模運動エネルギーとその収支方程式

3方向の運動方程式 (1)~(3) から、 $u \times (1) + v \times (2) + \omega \times (3)$ という操作により単位質量あたりの運動エネルギーに関するバランス方程式をつくる。このとき

$$u \frac{Du}{Dt} = \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial (u^2/2)}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial (u^2/2)}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial (u^2/2)}{\partial p} = \frac{D(u^2/2)}{Dt}$$

等に注意すると方程式の左辺からは曲率項とコリオリ項が上手くキャンセルして

$$u \frac{Du}{Dt} + v \frac{Dv}{Dt} + 0 = \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) = \frac{D\mathcal{K}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathcal{K}$$

という式が得られる。ただし、大気の大規模運動においては鉛直方向の速度は u, v に比べて小さく、単位質量あたりの運動エネルギー密度 \mathcal{K} に対して $\mathcal{K} = (u^2 + v^2 + w^2)/2 \simeq (u^2 + v^2)/2$ という近似を用いている。一方右辺は

$$-\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \omega \alpha + uF_\lambda + vF_\varphi = -\mathbf{v} \cdot \text{grad} \Phi - \omega \alpha + uF_\lambda + vF_\varphi$$

となるので、 $\mathbf{v} \cdot \text{grad}\Phi$ の項を左辺に移項し、

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathcal{K} + \Phi) = -\omega\alpha + uF_\lambda + vF_\phi$$

という関係式を得る。更に付録で示す関係式 $\text{div}(A\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad}A$ を用いるとこれは

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \text{div}\{(\mathcal{K} + \Phi)\mathbf{v}\} = -\omega\alpha + uF_\lambda + vF_\phi$$

と変形できる。この方程式の両辺を大気全体にわたり質量積分すると \mathbf{v} に関する境界条件から div の項は消えて

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{K} dm = - \int \omega\alpha dm + \int (uF_\lambda + vF_\phi) dm$$

という関係式が得られる。この方程式を標式的に

$$\frac{dK}{dt} = C(A, K) - D(K) \quad (8)$$

と書く。ただし

$$K = \int \mathcal{K} dm = \int (u^2 + v^2) dm \quad (9)$$

$$C(A, K) = - \int \omega\alpha dm \quad (10)$$

$$D(K) = - \int (uF_\lambda + vF_\phi) dm \quad (11)$$

である。

大気的全位置エネルギー

大気を理想気体と考え、その定積比熱を C_v とおくと、単位質量辺りの内部エネルギーは $I = c_v T$ 、位置エネルギーは $\Phi = gz$ で与えられる。静力学平衡の仮定の下でこれらを気柱全体にわたって積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho I dz &= \int_0^\infty \rho C_v T dz = \frac{1}{g} \int_0^{P_s} C_v T dp \\ \int_0^\infty \rho \Phi dz &= \int_0^\infty \rho g z dz = \int_0^{P_s} z dp \end{aligned}$$

ただし、 P_s は地表面気圧である。後者は更に部分積分で

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho g z dz &= - \int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial z} z dz \\ &= - [pz]_0^\infty + \int_0^\infty p dz = \int_0^\infty p dz \\ &= \int_0^\infty \rho RT dz \end{aligned}$$

とかける。従って、気柱全体における内部エネルギーと（力学的）位置エネルギーの和は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho(\Phi + I) dz &= \int_0^\infty \rho(RT + c_v T) dz \\ &= \int_0^\infty \rho C_p T dz = \frac{1}{g} \int_0^{P_s} C_p T dp \end{aligned}$$

となって、温度あるいはエンタルピーの積分として統一的に表される。これは静力学平衡の下では、内部エネルギーと位置エネルギーは独立ではないことの現れである。この事に鑑み、気象学に於いては位置エネルギー $\Phi = gz$ と内部エネルギー $I = C_v T$ の和 $\Phi + I$ をしばしば全位置エネルギー (total potential energy) と呼ぶ。

単位面積当たりの気柱の全位置エネルギーは、温位 $\vartheta = T(p_0/p)^\kappa$ を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho(\phi + I) dx &= \int_0^{P_s} C_p \vartheta \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa dp = \frac{C_p}{g} \left(\frac{1}{p_0}\right)^\kappa \int_0^{P_s} \vartheta p^\kappa dp \\ &= \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \int_0^{P_s} \vartheta dp^{\kappa+1} \end{aligned}$$

と表すこともできる。ここで更に

$$\int \vartheta dp^{\kappa+1} = \int d(\vartheta p^{\kappa+1}) - \int p^{\kappa+1} d\vartheta$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \int_0^{P_s} \vartheta dp^{\kappa+1} &= \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} [\vartheta p^{\kappa+1}]_0^{P_s} - \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \int_\infty^{\vartheta_s} p^{\kappa+1} d\vartheta \\ &= \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \vartheta_s P_s^{\kappa+1} + \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \int_{\vartheta_s}^\infty p^{\kappa+1} d\vartheta \\ &= \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \int_0^{\vartheta_s} P_s^{\kappa+1} d\vartheta + \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \int_{\vartheta_s}^\infty p^{\kappa+1} d\vartheta \end{aligned}$$

が成立する。ただし、 ϑ_s は、地表面（すなわちその気柱において $p = P_s$ となる気圧）での温位である。ここでの変形は、上式の右辺は、地面より下の気圧は常に P_s に等しいと考えて ϑ 座標において $p^{\kappa+1}$ を 0 から $+\infty$ まで積分したものに等しいという事を示している。この見方の下で

$$\int_0^\infty \rho(\Phi+I)dz = \frac{C_p}{g(\kappa+1)p_0^\kappa} \int_0^\infty p^{\kappa+1} d\vartheta \quad (12)$$

が成立する。

有効位置エネルギー

温位座標において

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_p}{g(1+\kappa)p_0^\kappa} \iiint (p^{\kappa+1} - \langle p \rangle_\vartheta^{\kappa+1}) dx dy d\vartheta \\ &= \frac{4\pi a^2 C_p}{g(1+\kappa)p_0^\kappa} \int_0^\infty (\langle p^{\kappa+1} \rangle_\vartheta - \langle p \rangle_\vartheta^{\kappa+1}) d\vartheta \end{aligned} \quad (13)$$

を有効位置エネルギー (available potential energy) と呼ぶ。ただし $\langle X \rangle_\vartheta$ は物理量 X の ϑ 面における全球平均値を表しており

$$\langle X \rangle_\vartheta = \iint X(x, y, \vartheta = \text{一定}) dx dy$$

である。 p は正の量であり、 $\kappa+1 > 1$ である事に注意すると、関数 $p^{\kappa+1}$ は下に凸な関数であって、

$$\langle p^{\kappa+1} \rangle_\vartheta \geq \langle p \rangle_\vartheta^{\kappa+1}$$

が成り立ち、有効位置エネルギーは常に正の量であることがわかる。

Lorenz(1955) に従い、有効位置エネルギーの気圧座標系における近似表現を求めておこう。温位座標系での点 (x, y, ϑ) における p の値を $p(x, y, \vartheta) = \langle p \rangle_\vartheta + p''(x, y, \vartheta)$ と表しておく、一般化された二項定理より

$$p^{\kappa+1} = (\langle p \rangle_\vartheta + p'')^{\kappa+1} = \langle p \rangle_\vartheta^{\kappa+1} \left\{ 1 + \kappa \left(\frac{p''}{\langle p \rangle_\vartheta} \right) + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2!} \left(\frac{p''}{\langle p \rangle_\vartheta} \right)^2 + \frac{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)}{3!} \left(\frac{p''}{\langle p \rangle_\vartheta} \right)^3 + \dots \right\}$$

と書けるので、これを $\vartheta = \text{一定}$ の温位面上で平均して

$$\langle A \rangle \simeq \frac{C_p \kappa}{2g p_0^\kappa} \int_0^\infty \langle p \rangle_\vartheta^{\kappa+1} \left\langle \left(\frac{p''}{\langle p \rangle_\vartheta} \right)^2 \right\rangle_\vartheta d\vartheta$$

という近似式を得る。温位座標における点 (x, y, ϑ) の気圧 $p(x, y, \vartheta)$ に対して、ある $\tilde{\vartheta}$ が存在して、 $p = \langle p \rangle_{\tilde{\vartheta}}$ と出来る事に注意すると

$$p'(x, y, \vartheta) = p(x, y, \vartheta) - \langle p \rangle_\vartheta = \langle p \rangle_{\tilde{\vartheta}} - \langle p \rangle_\vartheta \simeq \left. \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \vartheta} \right|_{\tilde{\vartheta}} (\tilde{\vartheta} - \vartheta) = \left(\left. \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial p} \right|_p \right)^{-1} \{\tilde{\vartheta} - \vartheta\}$$

である。そこで $d\vartheta = (\partial\vartheta/\partial p)dp$ に注意し、 ϑ に関する積分を p に関する積分に書き換えて

$$A \simeq \frac{C_p \kappa}{2g p_0^\kappa} \int_0^{P_s} p^{\kappa-1} \langle \vartheta \rangle_p^2 \left\langle - \left(\frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial p} \right)^{-1} \left(\frac{\vartheta''}{\langle \vartheta \rangle_p} \right)^2 \right\rangle_p dp$$

という近似表示を得る。温位の定義式 $\vartheta = (p_0/p)^{\kappa} T$ より $\langle \vartheta \rangle_p = (p_0/p)^{\kappa} \langle T \rangle_p$ 及び $\vartheta''/\langle \vartheta \rangle_p = T''/\langle T \rangle_p$ がただちにわかるので、ここから気圧座標系における有効位置エネルギーの近似表示

$$A \simeq \frac{C_p}{2} \int \gamma (T - \langle T \rangle_p)^2 dm \quad \left(= \frac{C_p}{2} \int \left(\frac{p}{p_0} \right)^{2\kappa} \gamma (\vartheta - \langle \vartheta \rangle_p)^2 dm \right) \quad (14)$$

を得る。ただし γ は大気の静的安定度を表す量で

$$\gamma = -\frac{\kappa}{p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \left(\frac{\partial \langle \vartheta \rangle_p}{\partial p} \right)^{-1} = -\left(\frac{\kappa \vartheta}{pT} \right) \left(\frac{\partial \langle \vartheta \rangle_p}{\partial p} \right)^{-1} = -\left(\frac{\kappa \langle \vartheta \rangle}{p \langle T \rangle} \right) \left(\frac{\partial \langle \vartheta \rangle_p}{\partial p} \right)^{-1} \quad (15)$$

である。

[注] 乾燥断熱減率 $\Gamma_d = -g/C_p$ 及び場の温度減率 $\Gamma = \partial T/\partial z$ を用いると

$$\frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial p} = \left(\frac{1}{\langle T \rangle} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial p} - \frac{\kappa}{p} \right) \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \langle T \rangle = -\frac{\kappa}{p} \left(1 + \frac{C_p}{g} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \right) \langle \vartheta \rangle = -\frac{\kappa}{p} \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\Gamma_d} \langle \vartheta \rangle$$

なので

$$\gamma = \frac{\Gamma_d}{\langle T \rangle_p} (\Gamma_d - \langle \Gamma \rangle_p)^{-1} \quad (16)$$

と書くことも出来る。

有効位置エネルギーに関する収支方程式

温位に関する発展方程式 (4) は

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \vartheta = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \frac{Q}{C_p}$$

と表される。気圧座標系では $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \vartheta = \text{div}(\vartheta \mathbf{v}) = \text{div}_h(\vartheta \mathbf{v}_h) + \partial \omega \vartheta / \partial p$ である事に注意してこれを p 面で平均すれば

$$\frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \omega \vartheta \rangle}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \frac{\langle Q \rangle}{C_p}$$

という全球平均値に対する方程式を得る。一方、場を (p 面における) 全球平均 $\langle \cdot \rangle$ とそれからの偏差 $(\cdot)''$ に分けて

$$\frac{\partial \langle \vartheta \rangle + \vartheta''}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\langle \vartheta \rangle + \vartheta'') = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \frac{\langle Q \rangle + Q''}{C_p}$$

と表しておき、そこから全球平均値に対する方程式を引いて $\text{grad}_h \langle \vartheta \rangle = 0$ に注意すると

$$\frac{\partial \vartheta''}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \vartheta'' + \omega \frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial p} - \frac{\partial \langle \omega \vartheta \rangle}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \frac{Q''}{C_p}$$

を得る。この式全体に $\vartheta'' = \vartheta - \langle \vartheta \rangle$ を掛けて p 面で全球平均すると左辺第 4 項は消えて

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle \vartheta''^2 \rangle}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \omega \vartheta''^2 \rangle}{\partial p} + \langle \omega \vartheta \rangle \frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \frac{\langle \vartheta'' Q'' \rangle}{C_p}$$

が得られる。この両辺に更に $(p/p_0)^{2\kappa} \gamma = -(\kappa/p)(p/p_0)^{2\kappa} (\partial \langle \vartheta \rangle / \partial p)^{-1}$ を乗じて、鉛直積分すると左辺第 2 項は消えて

$$\frac{C_p}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{(P_s)} \gamma \langle T''^2 \rangle dp = \int_0^{(P_s)} \gamma \langle T'' Q'' \rangle dp + \int_0^{(P_s)} \frac{R}{p} \langle \omega T \rangle dp$$

という式を得る。ただし、 γ の時間変化率は無視している。これを標式的に

$$\frac{dA}{dt} = G(A) - C(A, K) \quad (17)$$

と書く。ただし

$$G(A) = \int \gamma(T - \langle T \rangle)(Q - \langle Q \rangle) dm \quad (18)$$

$$C(A, K) = - \int \frac{R}{p} \omega T dm = - \int \omega \alpha dm \quad (19)$$

である。これらの項の意味については次節以降で触れる。

[問] 温位の定義式 (7) を対数微分して得られる

$$\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \kappa \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

及び、支配方程式 (4)

$$\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{Q}{C_p}$$

より、 T の時間変化に対し

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{Q}{C_p} = \frac{1}{C_p \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q}{C_p} = \frac{1}{C_p} (\alpha \omega + Q)$$

という関係式が得らる。これを用いて上記と同様の議論を行え。

大気大循環の維持とエネルギーの流れ

気圧座標系における近似表現 (10) によれば、有効位置エネルギー A は大気の水方向の温度の不均一性によって計られる。従って、温度の高い場所の更なる加熱や、温度の低い場所の更なる冷却により大気を持つ有効位置エネルギーは増加し、逆に温度を均一化するような加熱によって有効位置エネルギーは減少する。この意味で、有効位置エネルギーの収支方程式 (balance equation) に現れる $G(A)$ の項はまさしく有効位置エネルギーの生成率を表していると言える。一方、運動エネルギー K のバランス方程式に現れる $D(K)$ の項は、明らかに摩擦による運動エネルギーの消散 (散逸; dissipation) を表している。また、両者の式に共通に現れる項 $C(A, K)$ は、その値が大きくなれば、有効位置エネルギーが減少し、その分、大気の運動エネルギーが増える事になるので、これは、有効位置エネルギーと運動エネルギーの変換を表していることになる。これら両方の方程式を足し合わせると $C(A, K)$ の項がキャンセルして

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dK}{dt} = G(A) - D(K)$$

という式が得られ、大気への非均一な加熱による有効位置エネルギーの生成と摩擦による運動エネルギーの消散が釣り合うならば、大気の有効位置エネルギーと運動エネルギーの和は一定に保たれることがわかる。また、逆に、大気が定常状態にあって、その運動エネルギーや有効位置エネルギーの総量が変わらなければ有効位置エネルギーの生成率 $G(A)$ と運動エネルギーの散逸率 $D(K)$ は釣り合っていないことにならないこともわかる。この様に、大気の運動を議論する上では単なる位置エネルギーを考えるよりも有効位置エネルギーを用いた方が有効である。

有効位置エネルギーと運動エネルギーの定義式より、それらは常に正の量である。従って有効位置エネルギーと運動エネルギーの和は最小値を持ち、その値は零である。また、その最小値は両者が共に零である場合に達成される。運動エネルギーが零になるのは大気に全く運動が生じていない場合であり、有効位置エネルギーが零になるのは等温位面でみて水方向に全く圧力差が無い場合、つまり完全な安定成層の場合である。もし、この世界に摩擦が全く働かなければ、有効位置エネルギー零で安定成層を保ったまま大気が永久に運動を続けることも可能であるが、実際には摩擦があって、一般にそれは運動を妨げる方向に働く。従って、有効位置エネルギーと運動エネルギーの和が最小値をとるのは、大気が安定成層下で静止している場合に限られる。一般に摩擦力 (F_λ, F_ϕ) は運動を妨げる方向に働くので (18) 式で定義される運動エネルギーの散逸率 $D(K)$ は常に正の量である。一方、地球大気の状態を長期間に渡って平均的にみた場合、そこには常に何等かの運動が平均的に生じており、全く静止してしまうことは無いように見える。つまり地球大気は長期的には統計的準定常状態にあると見なすことが出来る。従って、そのような視点でみた場合、地球大気には摩擦による運動工

エネルギーの消散を補うような有効位置エネルギーの供給が準定常的になさなければならないことになる。つまり、地球大気における有効位置エネルギーの生成率 $G(A)$ とエネルギー変換率 $C(A, K)$ は平均的には正でなければならない、

$$G(A) \rightarrow A \rightarrow C(A, K) \rightarrow K \rightarrow D(K)$$

という準定常なエネルギーの流れが存在することになる。

平均場のエネルギーと擾乱のエネルギー

場を時間平均場 $(\bar{\cdot})$ とそれからの偏差 (擾乱) $(\cdot)'$ に分け、時間平均場を更に帯状平均 $[\cdot]$ とそれからの偏差 (擾乱) $(\cdot)^*$ に分けて考える。このとき例えば運動エネルギー K について

$$\begin{aligned} K &= \int (u^2 + v^2) dm \\ &= \int ([\bar{u}]^2 + [\bar{v}]^2) dm + \int (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2) dm + \int (u'^2 + v'^2) dm \\ &= K_Z + K_S + K_T \end{aligned}$$

という分解が出来る。 K_Z, K_S, K_T をそれぞれ平均帯状運動エネルギー (mean zonal kinetic energy)、定常擾乱運動エネルギー (stationary eddy kinetic energy)、非定常擾乱運動エネルギー (transient eddy kinetic energy) と呼ぶ。また $K_E = K_T + K_S$ は擾乱運動エネルギー (eddy kinetic energy) と呼ばれる。

同様に、有効位置エネルギー A に対し、

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_p}{2} \int \gamma(T - \langle \bar{T} \rangle)(T - \langle \bar{T} \rangle) dm \\ &= \frac{C_p}{2} \int \gamma([\bar{T}] - \langle \bar{T} \rangle)([\bar{T}] - \langle \bar{T} \rangle) dm + \frac{C_p}{2} \int \gamma(T'^2) dm + \frac{C_p}{2} \int \gamma(T'^2) dm \\ &= A_Z + A_S + A_T \end{aligned}$$

という分解が出来る。 A_Z を平均帯状有効位置エネルギー (zonal available potential energy)、 $A_E = A_S + A_T$ を擾乱有効位置エネルギー (eddy available potential energy) と呼ぶ。

帯状有効位置エネルギーの収支方程式

熱力学の式 (4) において、場を帯状平均 $[\cdot]$ とそれからの偏差 $(\cdot)^*$ に分けて

$$\frac{\partial([\vartheta] + \vartheta^*)}{\partial t} + ([\mathbf{v}] + \mathbf{v}^*) \cdot \text{grad}([\vartheta] + \vartheta^*) = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q] + Q^*}{C_p}$$

の様に表しておき、これの帯状平均をとると

$$\frac{\partial[\vartheta]}{\partial t} + [\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m[\vartheta] + \text{div}_m[\vartheta^* \mathbf{v}_m^*] = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q]}{C_p}$$

を得る。ただし添字 m は子午面における 2 次元のベクトル場及び演算を表しており、

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m[\vartheta] &= \frac{[v]}{a} \frac{\partial[\vartheta]}{\partial \varphi} + [\omega] \frac{\partial[\vartheta]}{\partial p} \\ \text{div}_m[\vartheta^* \mathbf{v}_m^*] &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial[v^* \vartheta^*] \cos \varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial[\omega^* \vartheta^*]}{\partial p} \end{aligned}$$

である。これから先に求めた温位の全球平均値に対する方程式を引いて

$$[\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m[\vartheta] = [\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle) + [\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m \langle \vartheta \rangle$$

に注意すれば

$$\frac{\partial([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)}{\partial t} + [\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle) + [\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m \langle \vartheta \rangle - \frac{\partial[\omega \vartheta]}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q] - \langle Q \rangle}{C_p} - \text{div}_m[\vartheta^* \mathbf{v}_m^*]$$

を得る。この両辺に $[\vartheta] - \langle \vartheta \rangle$ を乗じて南北積分すると左辺第 4 項は消え、更に

$$([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)[\mathbf{v}_m] \cdot \text{grad}_m \langle \vartheta \rangle = [\vartheta][\omega] \partial \langle \vartheta \rangle / \partial p - \text{div}_m\{(\langle \vartheta \rangle^2 / 2)[\mathbf{v}_m]\}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{div}_p \{([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)^2 [\mathbf{v}_p]\} + [\vartheta][\omega] \frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial p} - \operatorname{div}_p \{(\langle \vartheta \rangle^2 / 2) [\mathbf{v}_p]\} \\ & = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)([Q] - \langle Q \rangle)}{C_p} - \operatorname{div}_m \{([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle) [\vartheta^* \mathbf{v}_m^*]\} + [\vartheta^* \mathbf{v}_m^*] \cdot \operatorname{grad}_m([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle) \end{aligned}$$

である。ただし、添字 p はベクトル場あるいは演算の p 成分を表わすものとする。ここで、全体に $(\langle T \rangle / \langle \vartheta \rangle)^2 \gamma = -(\kappa/p)(p/p_0)^\kappa (\partial \langle \vartheta \rangle / \partial p)^{-1}$ を乗じて鉛直積分すれば左辺第 2,4 項も消え、残った項を右辺に移すと

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{2} \int \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2\kappa} \gamma \frac{\partial([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)^2}{\partial t} dp &= \int \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa \gamma ([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)([Q] - \langle Q \rangle) dp \\ &+ C_p \int \left(\frac{\kappa}{p}\right) \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa [\vartheta][\omega] dp \\ &+ C_p \int \gamma [\mathbf{v}^* \vartheta^*] \cdot \operatorname{grad}_m \left\{ \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 ([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle) \right\} dp \end{aligned}$$

が得られる。これを

$$\frac{dA_Z}{dt} = G(A_Z) - C(A_Z, K_Z) - C(A_Z, A_E)$$

と書く。ただし

$$\begin{aligned} G(A_Z) &= \int \gamma ([T] - \langle T \rangle)([Q] - \langle Q \rangle) dm \\ C(A_Z, K_Z) &= - \int [\omega][\alpha] dm \\ C(A_Z, A_E) &= -C_p \int \gamma [\mathbf{v}^* T^*] \frac{\partial [T]}{a \partial \varphi} dm - C_p \int \gamma [\omega^* T^*] p^\kappa \frac{\partial}{\partial p} \{p^{-\kappa} ([T] - \langle T \rangle)\} dm \end{aligned}$$

である。

[注] Pexiole & Oort (1992) によれば $C(A_Z, A_E)$ の第 2 項目は

$$-C_p \int p^{-\kappa} [\omega^* T^*] \frac{\partial}{\partial p} \{ \gamma p^\kappa ([T] - \langle T \rangle) \} dm$$

となっている。この形を得るには $([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle) \operatorname{div}[\vartheta^* \mathbf{v}^*]$ の項の微分演算を移す変形を、先に $(p/p_0)^{2\kappa} \gamma$ を乗じてから行えば良い。

擾乱有効位置エネルギーの収支方程式

場を帯状平均とそれからの偏差に分けて書いた熱力学の式

$$\frac{\partial([\vartheta] + \vartheta^*)}{\partial t} + ([\mathbf{v}] + \mathbf{v}^*) \cdot \operatorname{grad}([\vartheta] + \vartheta^*) = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q] + Q^*}{C_p}$$

から、帯状平均の方程式を引くと

$$\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} + [\mathbf{v}] \cdot \operatorname{grad} \vartheta^* + \mathbf{v}^* \cdot \operatorname{grad}[\vartheta] + \mathbf{v}^* \cdot \operatorname{grad} \vartheta^* - [\mathbf{v}^* \cdot \operatorname{grad} \vartheta^*] = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{Q^*}{C_p}$$

を得る。この両辺に ϑ^* を掛けて帯状平均すると、左辺第 5 項は消えて

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [\vartheta^{*2}]}{\partial t} + \frac{1}{2} [\mathbf{v}] \cdot \operatorname{grad}[\vartheta^{*2}] + [\vartheta^* \mathbf{v}^*] \cdot \operatorname{grad}[\vartheta] + \frac{1}{2} [\mathbf{v}^* \cdot \operatorname{grad}(\vartheta^{*2})] = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[\vartheta^* Q^*]}{C_p}$$

となるが、 $\mathbf{v}^* \cdot \operatorname{grad}(\vartheta^{*2}) = \operatorname{div}(\vartheta^{*2} \mathbf{v}^*)$ 等に注意しこれを大気全体で積分すると、左辺第 2,4 項も消えて

$$\frac{C_p}{2} \int \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2\kappa} \gamma \frac{\partial [\vartheta^{*2}]}{\partial t} dm + C_p \int \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2\kappa} \gamma [\vartheta^* \mathbf{v}^*] \cdot \operatorname{grad}[\vartheta] dm = \int \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2\kappa} \gamma \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa [\vartheta^* Q^*] dm$$

を得る。この左辺第二項を右辺に移し

$$\begin{aligned} [\vartheta^* \mathbf{v}^*] \cdot \text{grad}[\vartheta] &= [\vartheta^* \mathbf{v}^*] \cdot \text{grad}([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle) + [\vartheta^* \mathbf{v}^*] \cdot \text{grad}\langle \vartheta \rangle \\ &= [\vartheta^* \mathbf{v}^*] \frac{\partial [\vartheta]}{a \partial \varphi} + [\vartheta^* \omega^*] \frac{\partial([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)}{\partial p} + [\vartheta^* \omega^*] \frac{\partial \langle \vartheta \rangle}{\partial p} \end{aligned}$$

に注意して整理し直すと、

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{2} \int \gamma \frac{\partial [T^{*2}]}{\partial t} dm &= \int \gamma [T^* Q^*] dm - C_p \int \gamma [T^* v^*] \frac{\partial [T]}{a \partial \varphi} dm \\ &\quad - C_p \int \left(\frac{p}{p_0} \right)^{2\kappa} \gamma [\vartheta^* \omega^*] \frac{\partial([\vartheta] - \langle \vartheta \rangle)}{\partial p} dm + C_p \int \frac{\kappa}{p} [T^* v^*] dm \end{aligned}$$

を得る。すなわち

$$\frac{dA_E}{dt} = G(A_E) + C(A_Z, A_E) - C(A_E, K_E)$$

と書くことが出来る。ただし

$$\begin{aligned} G(A_E) &= \int \gamma [T^* Q^*] dm \\ C(A_Z, A_E) &= -C_p \int \gamma [v^* T^*] \frac{\partial [T]}{a \partial \varphi} dm - C_p \int \gamma [\omega^* T^*] p^\kappa \frac{\partial}{\partial p} \{ p^{-\kappa} ([T] - \langle T \rangle) \} dm \\ C(A_E, K_E) &= - \int \omega^* \alpha^* dm \end{aligned}$$

である。

帯状平均運動エネルギーの収支方程式

次に、東西平均流に対する方程式

$$\frac{[D][u]}{Dt} - \frac{\tan \varphi}{a} [u][v] - f[v] = - \frac{\partial [u^* v^*] \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} - \frac{\partial [u^* \omega^*]}{\partial p} + \frac{\tan \varphi}{a} [u^* v^*] + [F_\lambda] \quad (20)$$

$$\frac{[D][v]}{Dt} + \frac{\tan \varphi}{a} [u]^2 + f[u] = - \frac{1}{a} \frac{\partial [\Phi]}{\partial \varphi} - \frac{\partial [v^* v^*] \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} - \frac{\partial [v^* \omega^*]}{\partial p} - \frac{\tan \varphi}{a} [u^* u^*] + [F_\varphi] \quad (21)$$

$$0 = - \frac{\partial [\Phi]}{\partial p} - [\alpha] \quad (22)$$

を考える。ただし、

$$\frac{[D][\cdot]}{Dt} = \frac{\partial [\cdot]}{\partial t} + \frac{[v]}{a} \frac{\partial [\cdot]}{\partial \varphi} + [\omega] \frac{\partial [\cdot]}{\partial p}$$

とおいてある。このとき、先程と同様に $[u] \times (8) + [v] \times (9) + [\omega] \times (10)$ という式をつくると、左辺側は

$$[u] \frac{[D][u]}{Dt} + \frac{[D][v]}{Dt} = \frac{[D]}{Dt} \left(\frac{[u]^2 + [v]^2}{2} \right) = \frac{\partial [\mathcal{K}_h]}{\partial t} + [\mathbf{v}_h] \cdot \text{grad}_h [\mathcal{K}_h] = \frac{\partial [\mathcal{K}_h]}{\partial t} + \text{div}_h ([\mathcal{K}_h] [\mathbf{v}_h])$$

である。一方、平均流方程式右辺の擾乱からの寄与を表す項は、例えば u 成分の右辺の第一、二項の場合、それが

$$\frac{u^*}{a \cos \varphi} \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{v^*}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} + \omega^* \frac{\partial u^*}{\partial p} = \mathbf{v}^* \cdot \text{grad} u^*$$

という項の東西平均に由来していた事を思い出すと、右辺側は

$$-[\mathbf{v}] \cdot \text{grad}[\Phi] - [\omega][\alpha] - \{ [u] \mathbf{v}^* \cdot \text{grad} u^* + [v] \mathbf{v}^* \cdot \text{grad} v^* \} + [u] \frac{\tan \varphi}{a} [u^* v^*] - [v] \frac{\tan \varphi}{a} [u^* u^*] + [u][F_\lambda] + [v][F_\varphi]$$

と書ける。この $\{ \}$ の中の項は、

$$[u] \mathbf{v}^* \cdot \text{grad} v^* = [u] \text{div}(u^* \mathbf{v}^*) = \text{div}([u] u^* \mathbf{v}^*) - u^* \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[u]$$

等と書けることに注意すると、右辺側を大気全体にわたって積分した際に最終的に残る項は

$$-[\omega][\alpha] + u^* \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[u] + v^* \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[v] + [u] \frac{\tan \varphi}{a} [u^* v^*] - [v] \frac{\tan \varphi}{a} [u^* u^*] + [u][F_\lambda] + [v][F_\phi]$$

であることがわかる。よって東西平均した全運動エネルギーに対するバランス方程式

$$\frac{dK_Z}{dt} = C(A_Z, K_Z) - C(K_Z, K_E) - D(K_Z)$$

を得る。ただし

$$\begin{aligned} K_Z &= \int ([u]^2 + [v]^2) dm \\ C(A_Z, K_Z) &= - \int [\omega][\alpha] dm \\ C(K_Z, K_E) &= - \int [u^* v^*] \frac{\partial [u]}{a \partial \varphi} dm - \int [u^* \omega^*] \frac{\partial [u]}{\partial p} dm - \int [u] \frac{\tan \varphi}{a} [u^* v^*] dm \\ &\quad - \int [v^* v^*] \frac{\partial [v]}{a \partial \varphi} dm - \int [v^* \omega^*] \frac{\partial [v]}{\partial p} dm + \int [v] \frac{\tan \varphi}{a} [u^* u^*] dm \\ D(K_Z) &= - \int ([u][F_\lambda] + [v][F_\phi]) dm \end{aligned}$$

である。

擾乱 (渦動) 運動エネルギーの収支方程式

擾乱成分に対する運動方程式を線型化しない形でまとめておく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} + [\mathbf{v}] \cdot \text{grad} u^* + \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[u] - \frac{\tan \varphi}{a} ([u]v^* + [v]u^*) - f v^* \\ &= - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda} + F_\lambda^* - \mathbf{v}^* \cdot \text{grad} u^* + \frac{\tan \varphi}{a} u^* v^* + [\mathbf{v}^* \cdot \text{grad} u^*] - \frac{\tan \varphi}{a} [u^* v^*] \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} + [\mathbf{v}] \cdot \text{grad} v^* + \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[v] + 2 \frac{\tan \varphi}{a} [u]u^* + f u^* \\ &= - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \varphi} + F_\varphi^* - \mathbf{v}^* \cdot \text{grad} v^* - \frac{\tan \varphi}{a} u^* u^* + [\mathbf{v}^* \cdot \text{grad} v^*] + \frac{\tan \varphi}{a} [u^* u^*] \\ 0 &= - \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} - \alpha^* \end{aligned}$$

これまでと同様に、運動方程式の各成分に u^*, v^*, ω^* を乗じて辺々足しあわせると、コリオリ項と渦動相関項の $\tan \varphi$ の掛かった項は消えて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{K}_E}{\partial t} + \frac{1}{2} [\mathbf{v}] \cdot \text{grad}(u^{*2}) + u^* \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[u] + \frac{1}{2} [\mathbf{v}] \cdot \text{grad}(v^{*2}) + v^* \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[v] + \frac{\tan \varphi}{a} ([u]u^* v^* - [v]u^* u^*) \\ &= [\mathbf{v}^*] \cdot \text{grad} \Phi^* - \omega^* \alpha^* + u^* F_\lambda^* + v^* F_\varphi^* - \mathbf{v}^* \cdot \text{grad} \mathcal{K}_E \end{aligned}$$

となるので、これを大気全体にわたり質量積分して

$$\begin{aligned} \frac{dK_E}{dt} &= - \int u^* \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[u] dm - \int v^* \mathbf{v}^* \cdot \text{grad}[v] dm - \int \frac{\tan \varphi}{a} ([u]u^* v^* - [v]u^* u^*) dm - \int \omega^* \alpha^* dm + \int (u^* F_\lambda^* + v^* F_\varphi^*) dm \\ &= C(K_M, K_E) + C(A_E, K_E) - D(K_E) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $C(A_Z, K_Z)$ 及び $C(K_Z, K_E)$ は前節で定義した量であり

$$\begin{aligned} K_E &= \int (u^{*2} + v^{*2}) dm \\ D(K_E) &= - \int (u^* F_\lambda^* + v^* F_\varphi^*) dm \end{aligned}$$

である。

付録

本文の議論で必要となる球面圧力座標系でのベクトル微分演算について簡単に説明しておく。支配方程式の一つとして述べた連続の式 (5) は球面座標系における、3次元速度場 $\mathbf{v} = (u, v, \omega)$ の発散を表している。つまり、球面圧力座標系におけるベクトル場 $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ の発散は

$$\operatorname{div}\mathbf{X} = \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial X}{\partial\lambda} + \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial Y \cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial Z}{\partial p}$$

と書ける。一方、運動方程式 (1)~(3) の右辺第一項はジオポテンシャル Φ の勾配の各成分を表しており、球面圧力座標系における関数 ψ の勾配は一般に

$$\operatorname{grad}\psi = \left(\frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \frac{1}{a} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\psi}{\partial p} \right)$$

で与えられる。これらの関係式から、ベクトル場 \mathbf{X} と関数 ψ の積に対し一般に

$$\operatorname{div}(\psi\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{div}\mathbf{X}$$

が成立することが簡単な計算により確かめられる。特に、ベクトル場として風速場 \mathbf{v} をとった場合、連続の式 $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ より

$$\operatorname{div}(\psi\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}\psi$$

がいえる。このとき水平面 ($p = \text{一定の曲面}$) での2次元のベクトル場やベクトル演算を添え字 $_h$ を用いて表すことにすれば

$$\operatorname{div}_h(\psi\mathbf{v}_h) + \frac{\partial\psi\omega}{\partial p} = \mathbf{v}_h \cdot \operatorname{grad}_h\psi + \omega \frac{\partial\psi}{\partial p}$$

あるいは

$$\operatorname{div}_h(\psi\mathbf{v}_h) + \psi \frac{\partial\omega}{\partial p} = \mathbf{v}_h \cdot \operatorname{grad}_h\psi$$

である。また ψ としてジオポテンシャル Φ をとると、静力学平衡を表す方程式 (3) より

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{v}) = \mathbf{v}_h \cdot \operatorname{grad}_h\Phi - \omega\alpha$$

が得られる。これを大気全体で積分することにより関係式

$$\int \mathbf{v}_h \cdot \operatorname{grad}_h\Phi dm = \int \omega\alpha dm$$

が得られる。ただし積分は大気全体にわたる質量積分 (すなわち $dm = (1/g)a^2 \cos\varphi d\lambda d\varphi dp$) である。