

ロスビー波（準地衡風理論）

初稿 2009.02.02. (2011.10.22. 加筆) 村上

対数圧力座標系

中層大気の大規模な現象などを取り扱う場合、しばしば対数圧力 ($\log p$) 座標系が用いられる。対数圧力座標では p_s を地表気圧の標準値 (定数)、 H を取り扱う大気の代表的スケールハイトとして

$$z = -H \log \left(\frac{p}{p_s} \right), \quad p = p_s e^{-\frac{z}{H}}$$

により新しい鉛直座標 z を導入する。 H を上手くとればここで定義した z は実際の高度にほぼ等しくなるが、幾何学的な高度そのものではない。従って、別の記号で表した方が良いかもしれないが、ここでは記号が煩雑になるのを避けるために単に z と表しておく。このとき

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{H}{p}$$

より $dp = -(p/H)dz$ であり

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{dz}{dp} \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{H}{p} \frac{\partial}{\partial z}$$

である。また、この座標での鉛直速度は

$$w = \frac{dz}{dt} = -H \frac{d}{dt} \left\{ \log \left(\frac{p}{p_s} \right) \right\} = -H \left(\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) = -\frac{H}{p} \omega$$

で定義される。これらを用いて、 p 座標でのプリミティブ方程式系を書き直すと

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + f\mathbf{e}_z \times \mathbf{V} = -\nabla_h \Phi + \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\text{div}_h \mathbf{V} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial z} (pw) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{R}{C_p H} T w = \frac{Q}{C_p} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{RT}{H} \quad (4)$$

が得られる。ただしここでは、熱力学の方程式を ϑ ではなく T を用いて表しており、 D/Dt は2次元の、 d/dt は3次元のラグランジュ微分である。

静的安定度の指数 $S(p)$ を定義する際に現れた $\partial \tilde{\vartheta} / \partial p$ を対数圧力座標系で表すと

$$\frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial p} - \frac{\kappa}{p} \tilde{T} \right) = -\frac{H}{p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{R}{C_p H} \tilde{T} \right)$$

となるので $S(p)$ は次のように書ける。

$$S(p) = -\frac{R}{p} \left(\frac{T}{\vartheta} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \frac{RH}{p^2} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{R}{C_p H} \tilde{T} \right) = \left(\frac{H\mathcal{N}}{p} \right)^2$$

ただし \mathcal{N} は対数圧力座標系で表したブラント・バイサラ振動数で

$$\mathcal{N}^2 = \frac{R}{H} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{R}{C_p H} \tilde{T} \right) \quad (5)$$

である (つまり \tilde{T} を介した z の関数)。これらを用いて渦度と層厚で書いた β の準地衡風方程式系 (16),(15) を書き直して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta_0 + \beta v_0 - \frac{f_0}{p} \frac{\partial}{\partial z} (pw_1) = 0 \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \mathcal{N}^2 w_1 = 0 \quad (7)$$

を得る。更に、流線関数 $\psi = (1/f_0)\Phi$ を導入し、 w_1 を消去することで、対数圧力座標系での準地衡風ポテンシャル渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + f_0 + \beta y \right\} = 0 \quad (8)$$

が得られる。つまり、対数圧力座標系での準地衡風ポテンシャル渦度は

$$q = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + f_0 + \beta y \quad (9)$$

と書かれる。あるいは、任意関数 $\psi(x, y, z, t), \phi(x, y, z, t)$ に対し一般に

$$J(\psi, \phi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

で演算子 $J(\cdot, \cdot)$ を、また

$$\mathcal{L}(z)\phi = \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \phi \right)$$

で(線型)演算子 $\mathcal{L}(z)$ を定義して、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + J(\psi, \cdot) \right) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \mathcal{L}(z) \frac{\partial \psi}{\partial z} + f_0 + \beta y \right\} = 0$$

と書いても良い。ここで導入した演算子 $J(\cdot)$ について、一般に

$$J(\psi_1 + \psi_2, \phi) = J(\psi_1, \phi) + J(\psi_2, \phi)$$

$$J(\psi, \phi_1 + \phi_2) = J(\psi, \phi_1) + J(\psi, \phi_2)$$

が成り立つことを注意しておく。

(準地衡風)ロスビー波

前節で求めた準地衡風ポテンシャル渦度方程式に含まれる線型波動について調べる。そのために、流線関数を $\psi(x, y, z, t) = \Psi(y, z) + \psi^*(x, y, z, t)$ と、時間依存しない帯状平均場 Ψ とそれからの偏差 ψ^* に分けておく¹。これに応じて風速場も $u = \partial(\Psi + \psi^*)/\partial y = U(y, z) + u^*$ 、 $v = -\partial(\Psi + \psi^*)/\partial x = -\partial\psi^*/\partial x = v^*$ と書いておく。またポテンシャル渦度 q についても、それを Ψ から決まる部分と ψ^* から決まる部分に分けて

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + f_0 + \beta y \\ &= f_0 + \beta y - \frac{\partial U(y, z)}{\partial y} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \Psi(y, z)}{\partial z} \right) \\ q^* &= \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right) + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

と書いておく²。このとき明らかに

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + J(\Psi, \cdot) \right) Q = \frac{\partial Q(y, z)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(y, z)}{\partial x} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial \Psi(y, z)}{\partial y} \frac{\partial Q(y, z)}{\partial x} = 0$$

であって、このように選んだ基本場は自動的にポテンシャル渦度方程式を満たす。従って

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + J(\psi, \cdot) \right) q &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + J(\Psi, \cdot) + J(\psi^*, \cdot) \right) (Q + q^*) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + J(\Psi, \cdot) \right) q^* + J(\psi^*, Q) + J(\psi^*, q^*) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) q^* + J(\psi^*, Q) + J(\psi^*, q^*) = 0 \end{aligned}$$

¹場を帯状平均とそれからの偏差にわけて準地衡風渦度方程式の帯状平均をとると $\partial Q/\partial t + (\partial \psi^*/\partial x)(\partial q^*/\partial y) - (\partial \psi^*/\partial y)(\partial q^*/\partial x) = 0$ を得る。従って、散逸のない非断熱な系では、少なくとも擾乱による二次の影響を除いては東西平均場 Q (従って Ψ) には時間変化は無い。しかし、後に見るように、線型擾乱に対しては、この2次の項の影響も消える事が示せる。

² βy の項は帯状平均をとっても変わらないので自然に基本場 Q の方に入る。

が成り立ち、ここから擾乱に関する二次の項 $J(\psi^*, q^*)$ を省略することで線型擾乱の方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

が得られる。 $\partial Q / \partial x = 0$ に注意し Q, q^* を元に戻すと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right) + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \right\} + \left\{ \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right\} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

である。

上の方程式の波動解を調べるために $\psi^*(x, y, z, t) = \psi_0 \exp[i(kx + ly + mz - \sigma t)]$ の形の解を仮定して方程式に代入する。ただし解の z 依存性については、固有値方程式

$$\mathcal{L}(z)\eta(z) = p^{-1} \frac{d}{dz} p \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{d\eta}{dz} = -\tilde{m}^2 \eta(z) \quad \tilde{m} \text{ は定数} \quad (11)$$

の解 $\eta(z)$ を指数関数表示したものを $\exp(mz)$ と書いている。

[注] 例えば \mathcal{N} が高度によらず一定の場合、 $\eta(z) = \exp(z/2H \pm imz)$ の形の解が可能であり、対応する固有値方程式は

$$p^{-1} \frac{d}{dz} p \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{d\eta(z)}{dz} = -\frac{1}{\mathcal{N}^2} \left(m^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \eta(z)$$

となる。つまりこの場合 $\tilde{m}^2 = (f_0^2/\mathcal{N}^2)(m^2 + 1/4H^2)$ であり、 $\mathcal{L}(z)\exp(mz) = -\tilde{m}^2 \exp(mz)$ となる。一方、 $S(p)$ が高度に依らず一定の場合（その場合 $\mathcal{N} \sim p$ ）はその値を S として $\tilde{m}^2 = (f_0^2/S)m^2$ が成り立つ。

[問] これらのことを示せ

このように定義した m, \tilde{m} を用いれば、代入後の方程式は

$$\left\{ (k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)(i\sigma - Uik) + \frac{\partial Q}{\partial y} ik \right\} \psi_0 \exp[i(kx + ly + mz - \sigma t)] = 0$$

となり、これより分散関係

$$\sigma = Uk - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} k}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} = \left(U - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \right) k \quad (12)$$

が求まる。特に \mathcal{N}^2 が高度に依らず一定の場合の場合分散関係は (12) の \tilde{m} を $(f_0/\mathcal{N})\sqrt{m^2 + 1/4H^2}$ で置き換えた

$$\sigma = Uk - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(m^2 + \frac{1}{4H^2} \right)}$$

となる。

一般にポテンシャル渦度方程式から得られる線型波動（一次摂動方程式の波動解）をロスビー波と呼ぶ。分散関係 (12) 式からロスビー波の位相速度が

$$c_p = \left(\frac{\sigma}{k}, \frac{\sigma}{l}, \frac{\sigma}{m} \right) = \left(U - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}, \left\{ U - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)} \right\} \frac{k}{l}, \left\{ U - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)} \right\} \frac{k}{m} \right) \quad (13)$$

群速度が

$$c_g = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial k}, \frac{\partial \sigma}{\partial l}, \frac{\partial \sigma}{\partial m} \right) = \left(U + \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} (k^2 - l^2 - \tilde{m}^2)}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}, \frac{2 \frac{\partial Q}{\partial y} kl}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}, \frac{\frac{\partial Q}{\partial y} k \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m}}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2} \right) \quad (14)$$

として得られる。

定常ロスビー波とその伝播

波動解を与える k, l, \tilde{m}, σ (実数) に対して、波数ベクトル $\mathbf{k} = (k, l, \tilde{m})$ の大きさ $\sqrt{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}$ を全波数と呼び $|\mathbf{k}|$ あるいは K で表す。(13) 式よりロスビー波の東西方向の位相速度 C_{px} は平均場のポテンシャル渦度勾配、東西風速、及び全波数によって決まるが、特にこれがゼロになる場合すなわち $K^2 = k^2 + l^2 + \tilde{m}^2 = \frac{\partial Q}{\partial y} / U$ が成立する場合を考える (このときの波数 $K_s = \sqrt{\frac{\partial Q}{\partial y} / U}$ を特に定常波数と呼ぶ)。分散関係 (12) 及び (13) 式より、このとき $\sigma = 0$ であり、かつ $C_{py} = C_{pz} = 0$ (従って $\mathbf{C}_p = 0$) が成立する。これは空間の各点における波の位相が時間的に全く変化しないこと、すなわち波の形状が時間空間的に固定された定在波になることを意味する。このときの群速度は (14) 式より

$$c_{gs} = \left(\frac{2k^2 U}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}, \frac{2klU}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}, \frac{k \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m} U}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \right) \quad (15)$$

で与えられる。つまり、定常ロスビー波は、その位相を空間的に固定したまま、東向きに伝播し、またエネルギーをその方向に運ぶのである。

(準地衡風) EP フラックス

前節で求めた準地衡風ポテンシャル渦度方程式の線型擾乱に対する方程式を再掲しておく。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q^* + \frac{\partial Q}{\partial y} v^* = 0 \quad (16)$$

ただし

$$q^* = \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right) + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \quad (17)$$

$$v^* = \partial \psi^* / \partial x \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (19)$$

であった。これに q^* を乗じて整理し、エンストロフィー方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{q^* q^*}{2} + \frac{\partial Q}{\partial y} v^* q^* = 0$$

を得る。前節でも見たように Q は x, t には依存しなかったので、

$$\mathcal{A} = \frac{q^* q^*}{2 \frac{\partial Q}{\partial y}} \quad (20)$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{A} + v^* q^* = 0$$

という式を得る。 v^*q^* は擾乱 (波動) によるポテンシャル渦度偏差の南北輸送を表している。 q^* を u^*, v^* で書き戻し、 $\partial u^*/\partial x + \partial v^*/\partial y = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
v^*q^* &= v^* \left\{ \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^{*2}}{2} \right) - \left(\frac{\partial u^* v^*}{\partial y} - u^* \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^{*2} - u^{*2}}{2} \right) + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial u^* v^*}{\partial y} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^{*2} - u^{*2}}{2} \right) - \frac{\partial u^* v^*}{\partial y} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^{*2} - u^{*2}}{2} \right) - \frac{\partial u^* v^*}{\partial y} + p^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \frac{p f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left\{ v^{*2} - u^{*2} - \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial y} (-u^* v^*) + p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} p \left(\frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

と変形できる。ここで $T^* = T - [T]$ とおけば $\partial \psi^*/\partial z = RT^*/f_0H$ と書ける事に注意して

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} &= \left(\frac{1}{2} \left\{ v^* v^* - u^* u^* - \frac{R^2 T^{*2}}{\mathcal{N}^2 H^2} \right\}, -u^* v^*, \frac{f_0 R}{\mathcal{N}^2 H} v^* T^* \right) \\
&= \left(v^{*2} - \frac{1}{2} \left\{ u^{*2} + v^{*2} + \left(\frac{R}{p} T^* \right)^2 \right\}, -u^* v^*, \frac{f_0}{(\partial \theta / \partial z)} v^* \vartheta^* \right)
\end{aligned}$$

によりベクトル場 \mathfrak{F} を定義する。あるいは同じ事であるが、流線関数 ψ^* を用いて

$$\mathfrak{F} = \left(\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)^2 \right\}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \quad (21)$$

と書いておいても良い。

[注] 準地衡風エネルギー論でみたように、 $(RT^*/p)^2 = (\alpha^*)^2$ は擾乱の有効位置エネルギー (密度) に相当する量である。従って、 $(u^*u^* + v^*v^* + \alpha^*\alpha^*)/2$ あるいは $(1/2)\{(\partial \psi^*/\partial x)^2 + (\partial \psi^*/\partial y)^2 + (f_0^2/\mathcal{N}^2)(\partial \psi^*/\partial z)^2\}$ は擾乱 (波) のエネルギーに相当する量となる。よってこれを ε とおけば、ベクトル場 \mathfrak{F} の x 成分は $v^*v^* - \varepsilon$ と表現することが出来る。なお流線関数 ψ^* を用いた表示 (21) から $\text{div} \mathfrak{F} = v^*q^*$ を示すのは易しい。

このとき上に述べた計算から $\text{div} \mathfrak{F} = v^*q^*$ が成立する。従って、エンストロフィー方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{A} + \text{div} \mathfrak{F} = 0 \quad (22)$$

と書き換える事が出来る。これを更に帯状平均することで

$$\frac{\partial [\mathcal{A}]}{\partial t} + \text{div}_m [\mathfrak{F}] = 0 \quad (23)$$

という方程式が得られる。流線関数で表した \mathcal{A} 及び \mathfrak{F} の定義式に実数形式の波動解 $\psi^* = A_0 \sin(kx + ly + mz - \sigma t) = A_0 \sin \chi$ を代入すると

$$\mathcal{A} = \frac{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}{2 \frac{\partial Q}{\partial y}} A_0^2 \sin^2 \chi = \frac{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}{2 \frac{\partial Q}{\partial y}} A_0^2 \frac{1 - \cos 2\chi}{2}$$

及び

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} &= \left(\frac{1}{2} (k^2 - l^2 - \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2), kl, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} km \right) A_0^2 \cos^2 \chi \\
&= \left(\frac{1}{2} (k^2 - l^2 - \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2), kl, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} km \right) A_0^2 \frac{1 + \cos 2\chi}{2}
\end{aligned}$$

が得られる。 x 方向には周期境界条件が課されているとしてこれらを東西平均すると位相依存する \sin, \cos の部分が消えて

$$[\mathcal{A}] = \frac{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}{4 \frac{\partial Q}{\partial y}} A_0^2$$

及び

$$[\mathfrak{F}] = \left(\frac{1}{4}(k^2 - l^2 - \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2), \frac{1}{2}kl, \frac{1}{2} \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} km \right)$$

を得る。この y, z 成分のみに着目すると、 \mathcal{N} がある条件を満たすとき、前節でみたロスビー波の群速度 c_p の y, z 成分との間に $[\mathfrak{F}_m] = c_{g_m}[\mathcal{A}]$ という関係式が成り立っている事がわかる。従って上でみた方程式は波の振幅の2乗に比例する量 $[\mathcal{A}]$ が群速度 c_{g_m} によって(子午面内を)伝わっている(フラックス $[\mathfrak{F}_m] = c_{g_m}[\mathcal{A}]$ の形で運ばれている)ことを示す式であることが出来る。ここに定義した $[\mathcal{A}]$ をロスビー波の活動度密度 (wave activity density)、 $[\mathfrak{F}]$ を Eliassen-Palm flux (略して E-P フラックス) と呼ぶ。

ここでみた \mathfrak{F} と群速度 (の子午面成分) との平行性は、解が3次元平面波解になるような極限に於いて成立する。そのような条件としては、例えば $\mathcal{N} \sim p$ (すなわち $S(p) = \text{const}$) が考えられる。

平均流との相互作用

対数圧力座標系での準地衡風方程式系を再掲する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) u_0 - f_0 v_a - \beta y v_0 = 0 \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) v_0 + f_0 u_a + \beta y u_0 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + p^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (p w_a) = 0 \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \mathcal{N}^2 w_a = 0 \quad (27)$$

ただしここでは、 u_1, v_1 のうち $-\partial \Phi_1 / \partial x$ 等とつり合う部分を除いた非地衡風成分 (非発散成分) を u_a, v_a と記している。また鉛直速度については発散成分は0なので w_1 をそのまま w_a と書いているが、準地衡風理論の枠組み内ではこれは w そのものでもある。一般に x 方向に周期境界条件を課している場合、任意関数 ϕ に対し $\partial[\phi] / \partial x = 0$ が成立することに注意し、これらの方程式の東西平均をとることにより平均流に対する方程式系

$$\begin{aligned} \frac{\partial [u_0]}{\partial t} - f_0 [v_a] &= - \frac{\partial}{\partial y} [u_0^* v_0^*] \\ f_0 [u_a] + \beta y [u_0] &= - \frac{\partial}{\partial y} [v_0^* v_0^*] \\ \frac{\partial [v_a]}{\partial y} + p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (p [w_a]) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial [\Phi_0]}{\partial z} + \mathcal{N}^2 [w_a] &= - \frac{\partial}{\partial y} [v_0^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial z}] \end{aligned}$$

が得られる。ただし、関係式 $[v_0] = 0$ 、 $\partial u_0 / \partial x + \partial v_0 / \partial y = 0$ が用いられている。あるいは流線関数 ψ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial [\psi]}{\partial y} \right) + f_0 [v_a] &= - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial [\psi]}{\partial z} \right) + \frac{\mathcal{N}^2}{f_0} [w_a] &= - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

と書いておいても良い。ここで、第一式両辺に $-p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (p \frac{f_0}{\mathcal{N}^2} [\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z}])$ を加え、第二式の右辺は左辺に移す。すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial [\psi]}{\partial y} \right) + f_0 \left\{ [v_a] - p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{f_0}{\mathcal{N}^2} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right] \right) \right\} &= - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right] - p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right] \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial [\psi]}{\partial z} \right) + \frac{\mathcal{N}^2}{f_0} \left([w_a] + \frac{f_0}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right] \right) &= 0 \end{aligned}$$

という式が得られる。つまり、

$$[v_a]^\sharp = [v_a] - p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{f_0}{\mathcal{N}^2} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \right) \quad (28)$$

$$[w_a]^\sharp = [w_a] + \frac{f_0}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right] \quad (29)$$

とおき、 u_0, Φ_0 の表示に戻せば

$$-\frac{\partial [u_0]}{\partial t} + f_0 [v_a]^\sharp = -\text{div}_m [\mathfrak{F}] \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial [\Phi_0]}{\partial z} \right) + \mathcal{N}^2 [w_a]^\sharp = 0 \quad (31)$$

である。これを変形オイラー平均 (transformed Eulerian mean; TEM) 方程式系と呼ぶ。このとき

$$\frac{\partial [v_a]^\sharp}{\partial y} + p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (p [w_a]^\sharp) = 0$$

が成立している事に注意しよう。従って $(\partial/\partial y)(22) + (p^{-1}\partial/\partial z)(pf_0/\mathcal{N}^2)(23)$ をつくり、更に全体を y で偏微分することで $[v_a]^\sharp, [w_a]^\sharp$ の消去された方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla_m [\mathfrak{F}] = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 [u_0]}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial [u_0]}{\partial z} \right) \right\}$$

が得られる。一方、 $\partial(22)/\partial z - \partial(23)/\partial y$ により時間微分の項を消去すると

$$f_0 \frac{\partial [v_a]^\sharp}{\partial z} - \frac{\mathcal{N}^2}{f_0} \frac{\partial [w_a]^\sharp}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial z} \nabla_m [\mathfrak{F}]$$

となり、これに更に $p^{-1}(\partial/\partial z)(pf_0/\mathcal{N}^2)$ を作用させることで $[v_a]^\sharp$ に対する診断式

$$\frac{f_0}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial}{\partial z} \nabla_m [\mathfrak{F}] \right) = \left\{ \frac{\partial^2 [v_a]^\sharp}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial [v_a]^\sharp}{\partial z} \right) \right\}$$

を、また $\partial/\partial y$ を作用させることで $[w_a]^\sharp$ に対する診断式

$$\frac{f_0}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \nabla_m [\mathfrak{F}] = \left\{ \frac{\partial^2 [w_a]^\sharp}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (p [w_a]^\sharp) \right) \right\}$$

を得る。つまり、フラックス \mathfrak{F} が求めれば、それから東西平均流 $[u_0]$ の時間変化、変形オイラー平均子午面流 $[v_a]^\sharp, [w_a]^\sharp$ を求めることが出来る。

(非加速定理)

EP フラックスの3次元への拡張

これまで見てきた EP フラックスは、それを子午面内で見ると、ロスビー波の群速度と平行になっており、ロスビー波の伝播と平均流へのフィードバックを上手く表現する量になっていた。ただし、それには東西方向の平均をとることにより波に関する量の位相因子を消してやる事が必要であり、また東西方向に関しては波の伝播を適切に表す量になっているわけではないと云う点で不十分なものである。以下では、これを3次元的な波の伝播を表す量に拡張する試みについて述べる。最初に、ロスビー波のエネルギーとそのフラックスについて若干の考察を行う。

ロスビー波のエネルギーとエネルギーフラックス

準地衡風理論1のエネルギー論のところでは擾乱のエネルギーとその収支に関する方程式系を導いた。しかしロスビー波に関しては以下の方法によっても、波のエネルギー方程式を導くことが可能である。まず、線型化されたポテンシャル渦度偏差の方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q^* + \frac{\partial Q}{\partial y} v^* = 0$$

の両辺に ψ^* を掛けて全体を ψ^* で書き直す。

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi^* + U \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi^* + \frac{\partial Q}{\partial y} \psi^* \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

ただしここでは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} p \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial}{\partial z}$$

とおいであり、 $\Delta \psi^* = q^*$ である。このとき

$$\begin{aligned} \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 \\ \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right)^2 \\ \psi^* \frac{\partial}{\partial t} p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} &= p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{p f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \\ &= p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{p f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

等に注意すると、

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi^* = \operatorname{div} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon$$

が成立する。ただし

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

は波のエネルギーである。同様に

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi^* = \operatorname{div} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon$$

がいえ。よって方程式 (32) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon + \operatorname{div} \tilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon = 0$$

と書き直すことが出来る。ただし

$$\tilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon = \left(-\psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial y} \psi^{*2}, -\psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, -\psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \quad (33)$$

である。更に

$$\tilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon = (U\varepsilon, 0, 0) + \tilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon \quad (34)$$

として $U\partial\varepsilon/\partial x$ の項を div の中に取り込めば

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{\mathfrak{F}}_\varepsilon = 0 \quad (35)$$

と書くことが出来る。ここで波動解 $\psi^* = A_0 \sin(kx + ly + mz - \sigma t) = A_0 \sin \chi$ を考えると

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2 \right) A_0^2 \cos^2 \chi$$

かつ

$$\mathfrak{F}_\varepsilon = \left(U\varepsilon - k(\sigma - kU)A_0^2 \sin^2 \chi - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) A_0^2 \sin^2 \chi, -l(\sigma - kU)A_0^2 \sin^2 \chi, -m(\sigma - kU) \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} A_0^2 \sin^2 \chi \right) \quad (36)$$

となるが、分散関係 (12) を用いて $\sigma - kU$ を $-(\partial Q / \partial y)k / (k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)$ で置き換えれば \mathfrak{F}_ε は

$$\left(\frac{U}{2} \left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2 \right) A_0^2 \cos^2 \chi + \frac{1}{2} \frac{(k^2 - l^2 - \tilde{m}^2) \frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} A_0^2 \sin^2 \chi, \frac{kl \frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} A_0^2 \sin^2 \chi, \frac{km \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} A_0^2 \sin^2 \chi \right)$$

とも書ける。従って、位相因子に関して一周期で平均すれば \mathcal{N} に関する適当な条件下で

$$\overline{\mathfrak{F}_\varepsilon} = \overline{\varepsilon} \overline{C}_g \quad (37)$$

が成立する。すなわち、こうやって求めたエネルギーフラックス $\overline{\mathfrak{F}_\varepsilon}$ は群速度に平行である。

尚、定常ロスビー波の場合は、(36) 式において $\sigma = 0$ とすると

$$\mathfrak{F}_\varepsilon = \left(U\varepsilon + \frac{U}{2} (k^2 - l^2 - \tilde{m}^2) A_0^2 \sin^2 \chi, klUA_0^2 \sin^2 \chi, kmU \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} A_0^2 \sin^2 \chi \right) \quad (38)$$

と書ける事を注意しておく（この表記は次で利用する）。

EP フラックスの拡張・その 1 (Plumb 1985 のフラックス)

既に述べたように

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

により波のエネルギーを定義しておく、EP フラックスを表す (22) 式の \mathfrak{F} は

$$\mathfrak{F} = \left(v^* v^* - \varepsilon, -u^* v^*, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)$$

と書けた。更に (22) 式の左辺第二項を、 U が x に依らない事に注意し、div の中に入れてしまうと、

$$\mathfrak{F}_T = (U, 0, 0) \mathcal{A} + \mathfrak{F} = \left(U \mathcal{A} + v^* v^* - \varepsilon, -u^* v^*, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \quad (39)$$

として

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} + \text{div} \mathfrak{F}_A = 0 \quad (40)$$

という方程式が成立する。このとき、摂動方程式の波動解として $\psi^* = A_0 \sin(kx + ly + mz - \sigma t)$ の形のものを選んで $\mathcal{A}, \mathfrak{F}_A$ を具体的に計算してみると

$$\mathcal{A} = \frac{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}{2 \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)} A_0^2 \sin^2 \chi \quad (41)$$

$$\mathfrak{F}_A = \left(U \mathcal{A} + \frac{1}{2} (k^2 - l^2 - \tilde{m}^2) A_0^2 \cos^2 \chi, klA_0^2 \cos^2 \chi, km \left(\frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \right) A_0^2 \cos^2 \chi \right) \quad (42)$$

となり、 \mathfrak{F}_A の定数部分は C_g に平行であるものの、位相依存部分があるため結果として C_g に平行にはなっていない事がわかる。一方、（先に見たように）周期境界条件の下で東西平均をとれば、位相依存部分が消えて $[\mathfrak{F}_A] = [\mathcal{A}] [C_g]$ となるが、これでは東西方向の波動伝播を表現するには不適切である。しかしながら、前項でみた (38) 式に着目して \mathfrak{F}_A に $(1/U) \mathfrak{F}_\varepsilon$ を加えてやると、 $\sin^2 \chi + \cos^2 \chi = 1$ という関係により、定在波の場合に限っては、その位相依存部分が消せることがわかる。実際このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{A} + \frac{\varepsilon}{U} &= \frac{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}{2 \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)} A_0^2 \sin^2 \chi + \frac{(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2)^2}{2U} A_0^2 \cos^2 \chi \\ &= \left\{ \frac{(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2)^2}{2U} - \frac{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}{2 \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)} \right\} A_0^2 \cos^2 \chi + \frac{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2}{2 \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)} A_0^2 \end{aligned}$$

より、 \mathcal{N} に関する適当な条件下で $\mathcal{A} + \varepsilon/U \rightarrow (k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)A_0^2/(2U)$ であり、また

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_A + \frac{1}{U}\mathfrak{F}_\varepsilon &= \left(U\mathfrak{F}_A + \varepsilon + \frac{1}{2}(k^2 - l^2 - \tilde{m}^2)A_0^2, klA_0^2, km \left(\frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \right) A_0^2 \right) \\ &= \left(k^2 A_0^2, klA_0^2, km \left(\frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \right) A_0^2 \right) = \left(\mathcal{A} + \frac{\varepsilon}{U} \right) \mathbf{C}_g\end{aligned}$$

が成立する。従って、 $\mathcal{A}_S = \mathcal{A} + \frac{\varepsilon}{U}$ により新たな波活動度密度を定義し、定常波に対する $\mathfrak{F}_A + \frac{1}{U}\mathfrak{F}_\varepsilon$ を新たなフラックス \mathfrak{F}_S として定義すればこれが定常ロスビー波の3次元伝播を表す波活動度フラックスとなる。これらが関係式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_S + \text{div} \mathfrak{F}_S = 0 \quad (43)$$

を満たすことは、(33)式で $\partial/\partial t$ の項をゼロとおいて (35)式に入れたものと (39)式の和をとることで確認できる。 \mathfrak{F}_S の具体的な形を改めて書いておくと

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_S &= \left(U\mathcal{A} - \frac{1}{2} \frac{(\partial Q/\partial y)}{U} \psi^{*2} + \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y}, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y}, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right) \right)\end{aligned} \quad (44)$$

である。ただし最後の変形については、線型化された準地衡風ポテンシャル渦度偏差方程式で定常解を仮定すると

$$U \frac{\partial q^*}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Uq^* + \frac{\partial Q}{\partial y} \psi^* \right) = 0$$

が成り立つ事及び

$$\begin{aligned}U\mathcal{A} - \frac{1}{2} \frac{(\partial Q/\partial y)}{U} \psi^{*2} &= \frac{U}{\partial Q/\partial y} \left\{ q^{*2} - \left(\frac{\partial Q/\partial y}{U} \right)^2 \psi^{*2} \right\} \\ &= \frac{U}{\partial Q/\partial y} \left\{ q^* \left(q^* + \left(\frac{\partial Q/\partial y}{U} \right) \psi^* \right) - \left(\frac{\partial Q/\partial y}{U} \right) \psi^* \left(q^* + \left(\frac{\partial Q/\partial y}{U} \right) \psi^* \right) \right\}\end{aligned}$$

から、ベクトル場 $(U\mathcal{A} - \frac{1}{2} \frac{(\partial Q/\partial y)}{U} \psi^{*2}, 0, 0)$ の発散が消えるを用いた。こうして Plumb(1985) で定義された波活動度フラックスが得られる。これは定常ロスビー波に対して用いられるべきものであるが、フラックスの位相依存性を消すための平均操作は一切必要ない事を注意しておく。

Plumb 1985 フラックスの別の求め方

前項 (42) 式における位相依存性は別の方法によっても消す事が出来る。天下降的ではあるが

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi^{*2} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial}{\partial z} \psi^{*2}, -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \psi^{*2}, -\frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \psi^{*2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2\varepsilon - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 + \psi^* \Delta \psi^* - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}, -\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y}, -\frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} + \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right) \right)\end{aligned} \quad (45)$$

というベクトル場を導入する。このとき \mathfrak{G} の最初の表記より $\text{div} \mathfrak{G} = 0$ となるのは容易にわかるので

$$\mathfrak{F}_S = \mathfrak{F}_A + \mathfrak{G}$$

とにおいて

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} + \text{div} \mathfrak{F}_S = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} + \text{div} \mathfrak{F}_A = 0$$

が成立する。このとき \mathfrak{F}_S を具体的に計算してみると

$$\mathfrak{F}_S = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \left\{ \frac{U}{\left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)} q^* + \psi^* \right\} q^*, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y}, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right)$$

となることがわかる。しかるに、線型化された準地衡風ポテンシャル渦度偏差の方程式 (15) において、定常状態を考えると $\partial/\partial t$ の項が消えて

$$U \frac{\partial q^*}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(U q^* + \frac{\partial Q}{\partial y} \psi^* \right) = 0$$

が成立する。これより、定常ロスビー波に対しては

$$\mathfrak{F}_s = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^2 - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y}, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \psi^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right) \quad (46)$$

となることがわかる。ここで例えば、 ψ^* として波動解 $A_0 \sin(kx + ly + mz - \sigma t)$ を考え、上の \mathfrak{F}_s の表式に代入すると

$$\mathfrak{F}_s = \frac{A_0^2}{2} \left(k^2, kl, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} km \right) (\sin^2 \chi + \cos^2 \chi) = \frac{A_0^2}{2} \left(k^2, kl, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} km \right)$$

となって、位相因子が消え、しかも定常ロスビー波の群速度を \mathbf{C}_g として

$$\mathfrak{F}_s = \frac{|\mathbf{K}_s|^4 A_0^2}{4 \frac{\partial Q}{\partial y}} \mathbf{C}_g$$

が成立していることがわかる。ただし、 $|\mathbf{K}_s| = \sqrt{(\frac{\partial Q}{\partial y})/U}$ は定常波数である。

東西非一様基本場におけるロスビー波の群速度

これまでは東西一様な基本場中におけるロスビー波の伝播とその活動度フラックスについてみてきたが、これからはばらくは基本場の東西一様性を仮定しない議論を行う。準地衡風渦位方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) q = s \quad (47)$$

$$q = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + p^{-1} \frac{\partial p f_0^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + f_0 + \beta y \quad (48)$$

において流線関数を $\psi = \bar{\psi} + \psi'$ と平均場とそれからの偏差に分割するとき準地衡風渦位は

$$\bar{q} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + p^{-1} \frac{\partial p f_0^2}{\partial z} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + f_0 + \beta y \quad (49)$$

$$q' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + p^{-1} \frac{\partial p f_0^2}{\partial z} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \quad (50)$$

と分割され、平均場及び擾乱に対する方程式はそれぞれ

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial x} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial y} \frac{\partial \bar{q}'}{\partial x} = \bar{s} \quad (51)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial q'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial q'}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial q'}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial q'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial q'}{\partial y} \right) = s' \quad (52)$$

となる。以下では平均場に関する量を大文字で、擾乱に関する量を ' 付きの小文字で表わす事にし、平均場の渦位方程式と線型化した渦位偏差の方程式を

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + U \frac{\partial Q}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial y} = - \left(u' \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial q'}{\partial y} \right) + \bar{s} \quad (53)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + V \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} u' + \frac{\partial Q}{\partial y} v' = s' \quad (54)$$

の様に書く。最初に、東西非一様基本場中を伝播するロスビー波の群速度を求めておく。源泉項をゼロとした線型化された準地衡風渦位偏差方程式

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + V \frac{\partial q'}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (55)$$

に波動解 $\psi = \psi_0 \sin(kx + ly + mz - \sigma t) = \psi_0 \sin \chi$ を代入して整理することで分散関係

$$\sigma = kU + lV + \frac{l}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{k}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (56)$$

を得る。これより、東西非一様な基本場中における Rossby 波の位相速度が

$$\left(\frac{\sigma}{k}, \frac{\sigma}{l}, \frac{\sigma}{m} \right) = \left(U + \frac{l}{k} V - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} + \frac{\frac{l}{k} \frac{\partial Q}{\partial x}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}, \frac{k}{l} U + V - \frac{\frac{k}{l} \frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} + \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}, \frac{k}{m} U + \frac{l}{m} V - \frac{\frac{k}{m} \frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} + \frac{\frac{l}{m} \frac{\partial Q}{\partial x}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \right) \quad (57)$$

群速度が

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial k}, \frac{\partial \sigma}{\partial l}, \frac{\partial \sigma}{\partial m} \right) = \left(U + \frac{k^2 - l^2 - \tilde{m}^2}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{2kl}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2} \frac{\partial Q}{\partial x}, V + \frac{2kl}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{-k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2} \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{k \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m}}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{l \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m}}{(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (58)$$

と求まる。

[注] 上で考えた波動解を平均場の準地衡風渦位方程式の右辺にあてはめると、擾乱による応力を表す二つの項は丁度打ち消しあい、その効果がゼロになる。従って源泉項がゼロであれば、特に理由のない限り平均場の渦位は流れに沿って流されるだけであってラグランジュ的には時間変化しない。平均操作として特に東西平均を考えると、平均場方程式左辺の第 2, 3 項も消え、流れによって平均場の渦位はオイラー的にも全く変化しない事になる。2 ページ目に述べた、東西平均場が時間的にも変化しないという性質はこのことより従う。

平均操作として時間平均を考える。系が定常状態にあれば、平均場の方程式 (53) に於いて、時間微分の項 $\partial Q / \partial t$ が消える。また、上の注より非散逸断熱系では (53) 式右辺もゼロと見なして良い。よってその場合、基本場に関して

$$U \frac{\partial Q}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

という関係式が成立する。このことを用いて分散関係 (56) 式を変形すると

$$\begin{aligned} \sigma &= k \left(U - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \right) + l \left(V + \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \right) \\ &= (kU + lV) \left(1 + \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{V(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)} \right) \\ &= (kU + lV) \left(1 - \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{U(k^2 + l^2 + \tilde{m}^2)} \right) \end{aligned}$$

を得る。これより、Rossby 波が定在波、すなわち $\sigma = 0$ になる為の条件として

$$kU + lV = 0 \quad \text{or} \quad U = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \quad \text{or} \quad V = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \quad (59)$$

が得られる。定在波の条件として $U + (\partial Q / \partial y) / (k^2 + l^2 + \tilde{m}^2) = V - (\partial Q / \partial x) / (k^2 + l^2 + \tilde{m}^2) = 0$ を要求すると、そのときのロスビー波の位相速度は

$$\mathbf{C}_{ps} = (0, 0, 0)$$

群速度は

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{gs} &= \left(U + \frac{k^2 - l^2 - \tilde{m}^2}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} U + \frac{2kl}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} V, V + \frac{-k^2 + l^2 - \tilde{m}^2}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} V + \frac{2kl}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} U, \frac{k \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m} U + l \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m} V}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \right) \\ &= \left(\frac{2k(kU + lV)}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}, \frac{2l(kU + lV)}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2}, \frac{k \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m} U + l \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial m} V}{k^2 + l^2 + \tilde{m}^2} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

となる。

[注] ここで更に条件 $kU + lV = 0$ を要求すると $C_{gs} = 0$ となり、波は存在しない事になる。よって定在波の条件としては $kU + lV \neq 0$ かつ $U + (\partial Q / \partial y) / (k^2 + l^2 + \bar{m}^2) = V - (\partial Q / \partial x) / (k^2 + l^2 + \bar{m}^2) = 0$ とするのが妥当。

EP フラックスの拡張・その2 (Plumb 1986 のフラックス)

線型化した準地衡風渦位偏差方程式

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + V \frac{\partial q'}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} u' + \frac{\partial Q}{\partial y} v' = s'$$

の両辺に q' を乗じて少し変形すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q'^2}{2} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q'^2}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q'^2}{2} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} q' u' + \frac{\partial Q}{\partial y} q' v' = q' s' \quad (61)$$

が得られる。このとき現れる $q' v'$ に関して、既に見たように

$$\begin{aligned} q' v' &= \frac{\partial \psi'}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right\} \\ &= \text{div} \left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2 \right\}, \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right] \\ &= \text{div} \left[v' v' - \varepsilon, -u' v', \frac{f_0}{(\partial \bar{\theta} / \partial dz)} v' \vartheta' \right] \end{aligned} \quad (62)$$

が、同様に $q' u'$ に対し

$$\begin{aligned} q' u' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{p} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right\} \\ &= -\text{div} \left[\frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2 \right\}, \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right] \\ &= \text{div} \left[u' v', -(u' u' - \varepsilon), \frac{f_0}{(\partial \bar{\theta} / \partial dz)} u' \vartheta' \right] \end{aligned} \quad (63)$$

が成立する。よって、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q'^2}{2} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q'^2}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q'^2}{2} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} \left[\frac{u' v'}{(\frac{f_0}{\partial \bar{\theta} / \partial dz}) u' \vartheta'} \right] + \frac{\partial Q}{\partial y} \left[\frac{v' v' - \varepsilon}{(\frac{f_0}{\partial \bar{\theta} / \partial dz}) v' \vartheta'} \right] = q' s'$$

を得る。この式の時間平均をとって全体を

$$|\nabla_H Q| = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2} \quad (64)$$

で割り、更に平均場に関する量を微分演算子の中に入れることで

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} + \text{div} \begin{bmatrix} U \mathcal{A} + \frac{\partial Q}{\partial x} \overline{u' v'} + \frac{\partial Q}{\partial y} (\overline{v' v'} - \bar{\varepsilon}) \\ V \mathcal{A} - \frac{\partial Q}{\partial x} (\overline{u' u'} - \bar{\varepsilon}) - \frac{\partial Q}{\partial y} \overline{u' v'} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{f_0}{|\nabla_H Q|} \overline{u' \vartheta'} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{f_0}{|\nabla_H Q|} \overline{v' \vartheta'} \end{bmatrix} = \frac{\overline{q' s'}}{|\nabla_H Q|} \quad (65)$$

が得られる。ただし ∇_H は水平 2 次元の勾配演算子で

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{q' q'}}{2|\nabla_H Q|} = \frac{\overline{\left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p f_0^2}{\mathcal{N}^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2}}{2\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2}} \quad (66)$$

とおいた。準定常状態にある基本場に対しては

$$U \frac{\partial Q}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial y} \approx 0$$

が成り立つと考えられるのでこれと (64) 式より

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{|\nabla_H Q|} = \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \quad , \quad \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{|\nabla_H Q|} = -\frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} \quad (67)$$

がいえる。これらを用いて (65) 式を書き直せば Plumb (1986) における関係式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} + \text{div} \mathfrak{F}_T = \frac{\overline{q' s'}}{|\nabla_H Q|} \quad (68)$$

が得られる。ただし

$$\mathfrak{F}_T = \mathcal{A}(U, V, 0) + \mathfrak{F}_R \quad (69)$$

で

$$\mathfrak{F}_R = \frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}} \begin{bmatrix} U(\overline{v'v'} - \bar{\epsilon}) - V\overline{u'v'} \\ -U\overline{u'v'} + V(\overline{u'u'} - \bar{\epsilon}) \\ U \frac{f_0}{(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z})} \overline{v' \vartheta'} - V \frac{f_0}{(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z})} \overline{u' \vartheta'} \end{bmatrix} \quad (70)$$

である。フラックス \mathfrak{F}_T がロスビー波の群速度に平行であることをみるために波動解 $\psi' = \psi_0 \sin(kx + ly + mz - \sigma t)$ を代入する。このとき関係式 (67) に注意すれば

$$\mathfrak{F}_R = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{|\nabla_H Q|} \begin{bmatrix} k^2 - \frac{1}{2} \left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2 \right) \\ kl \\ \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} km \end{bmatrix} \psi_0^2 \cos^2 \chi - \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{|\nabla_H Q|} \begin{bmatrix} kl \\ l^2 - \frac{1}{2} \left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} m^2 \right) \\ \frac{f_0^2}{\mathcal{N}^2} lm \end{bmatrix} \psi_0^2 \cos^2 \chi$$

を得る。これと $\mathcal{A} = -(k^2 + l^2 + \bar{m}^2) \psi_0^2 \sin^2 \chi$ に注意すれば平面波の極限において $\mathfrak{F}_T = \mathcal{A} \mathbf{C}_g$ が確認される。

EP フラックスの拡張・その 3 (Trenberth 1986 のフラックス)

f 面における準地衡風方程式系を以下のように書いておく。

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathcal{F}_x \quad (71)$$

$$\frac{dv}{dt} - fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathcal{F}_y \quad (72)$$

$$\frac{d\Phi_z}{dt} + w\mathcal{N}^2 = \kappa Q \quad (73)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} pw = 0 \quad (74)$$

$$\Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = RT \quad (75)$$

ここで $u = \bar{u} + u'$ 等と分割し

$$D = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y}$$

とおくと、平均場に関する方程式系が

$$D\bar{u} - f\bar{v} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \bar{\mathcal{F}}_x \quad (76)$$

$$D\bar{v} + f\bar{u} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'v'} + \bar{\mathcal{F}}_y \quad (77)$$

$$D\bar{\Phi}_z + \bar{w}\mathcal{N}^2 = \kappa \bar{Q} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'\Phi_z} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'\Phi_z} \quad (78)$$

のように得られる。更に擾乱の運動エネルギーと相対渦度を

$$\bar{K}_T = \frac{u'u' + v'v'}{2}, \quad \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$$

で定義しておく、

$$u'\zeta' = u' \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(u'v') + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v'v' - u'u'}{2}$$

$$v'\zeta' = v' \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{v'v' - u'u'}{2} - \frac{\partial}{\partial y}(u'v')$$

より平均場の方程式 (76), (77) は

$$D\bar{u} - f\bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\Phi} + \bar{K}_T) = v'\zeta' + \overline{\mathcal{F}_x} \quad (79)$$

$$D\bar{v} + f\bar{u} + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\Phi} + \bar{K}_T) = -u'\zeta' + \overline{\mathcal{F}_y} \quad (80)$$

と書くことが出来る。ここで更に

$$w^\# = \bar{w} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{u'\Phi'_z}}{\mathcal{N}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{v'\Phi'_z}}{\mathcal{N}^2} \right) \quad (81)$$

とおいてやると (78) 式は

$$D\bar{\Phi}_z + w^\# \mathcal{N}^2 = \kappa \bar{Q} \quad (82)$$

となり、その右辺から見かけ上擾乱の影響を消すことが出来る。このとき同時に

$$u^\# = \bar{u} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\Phi} + \bar{K}_T) - p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{\overline{u'\Phi'_z}}{\mathcal{N}^2} \right) \quad (83)$$

$$v^\# = \bar{v} - \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\Phi} + \bar{K}_T) - p^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{\overline{v'\Phi'_z}}{\mathcal{N}^2} \right) \quad (84)$$

とおき

$$\mathbf{E}_u = \left(\frac{\overline{v'v' - u'u'}}{2}, -\overline{u'v'}, f \frac{\overline{v'\Phi'_z}}{\mathcal{N}^2} \right) \quad (85)$$

$$\mathbf{E}_v = \left(-\overline{u'v'}, -\frac{\overline{v'v' - u'u'}}{2}, -f \frac{\overline{u'\Phi'_z}}{\mathcal{N}^2} \right) \quad (86)$$

によりベクトル場 $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v$ を定義すれば平均場の方程式 (79), (80) は

$$D\bar{u} - f\bar{v}^\# = \text{div} \mathbf{E}_u + \overline{\mathcal{F}_x} \quad (87)$$

$$D\bar{v} + f\bar{u}^\# = \text{div} \mathbf{E}_v + \overline{\mathcal{F}_y} \quad (88)$$

と書き換える事が出来る。ここで導入されたベクトル場 $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v$ が Trenberth (1986) における E vector、或いは localized Eliassen-Palm flux と呼ばれるものである。また、(81), (83), (84) は帯状平均基本場の場合の residual circulation (28), (29) に対応しており、方程式 (87), (88), (82) が Transformed Eulerian Mean (TEM) 方程式系に相当する。残差循環 ($u^\#, v^\#, w^\#$) に関して連続の方程式

$$\frac{\partial u^\#}{\partial x} + \frac{\partial v^\#}{\partial y} + p^{-1} \frac{\partial p w^\#}{\partial z} = 0$$

が成立する。

付録

気圧座標系における各種フラックスの表現

Plumb (1986) のフラックス

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_T &= \frac{\overline{q'q'}}{2|\nabla_h Q|} \begin{bmatrix} U \\ V \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{U}{\sqrt{U^2+V^2}} \begin{bmatrix} \overline{v'v'} - \bar{\epsilon} \\ -\overline{u'v'} \\ -\frac{R}{p} \frac{f_0}{S(p)} \overline{v'T'} \end{bmatrix} + \frac{V}{\sqrt{U^2+V^2}} \begin{bmatrix} -\overline{u'v'} \\ \overline{u'u'} - \bar{\epsilon} \\ \frac{R}{p} \frac{f_0}{S(p)} \overline{u'T'} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\overline{q'q'}}{2|\nabla_h Q|} \begin{bmatrix} U \\ V \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{U}{\sqrt{U^2+V^2}} \begin{bmatrix} \overline{v'v'} - \bar{\epsilon} \\ -\overline{u'v'} \\ -\frac{f_0}{S(p)} \overline{v'\alpha'} \end{bmatrix} + \frac{V}{\sqrt{U^2+V^2}} \begin{bmatrix} -\overline{u'v'} \\ \overline{u'u'} - \bar{\epsilon} \\ \frac{f_0}{S(p)} \overline{u'\alpha'} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Trenberth (1986) の E-vector

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_u &= \left(\frac{\overline{v'v'} - \overline{u'u'}}{2}, -\overline{u'v'}, -\frac{R}{p} \frac{f_0}{S(p)} \overline{v'T'} \right) = \left(\frac{\overline{v'v'} - \overline{u'u'}}{2}, -\overline{u'v'}, -\frac{f_0}{S(p)} \overline{v'\alpha'} \right) \\ \mathbf{E}_v &= \left(-\overline{u'v'}, -\frac{\overline{v'v'} - \overline{u'u'}}{2}, \frac{R}{p} \frac{f_0}{S(p)} \overline{u'T'} \right) = \left(-\overline{u'v'}, -\frac{\overline{v'v'} - \overline{u'u'}}{2}, \frac{f_0}{S(p)} \overline{u'\alpha'} \right)\end{aligned}$$