

Eliassen-Palm flux メモ

2008.11.06. 村上

支配方程式系

経度 λ 、緯度 φ 、気圧 p を座標変数とする球面圧力座標系での大気の運動の支配方程式 (プリミティブ方程式系) を以下に示す。

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{\tan \varphi}{a} uv - fv = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + F_\lambda \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{\tan \varphi}{a} u^2 + fu = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + F_\varphi \quad (2)$$

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \alpha \quad (3)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{Q}{C_p} \quad (4)$$

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5)$$

この座標系におけるラグランジュ微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

であり、従属変数として、東西及び南北風速 u, v 、圧力速度 $\omega (= dp/dt)$ 、ジオポテンシャル $\Phi (= gz)$ 、比容 $\alpha (= 1/\rho)$ 及び温位 θ をとっている。比容 α は状態方程式により大気温度 T 及び圧力 p と関係式

$$p\alpha = RT \quad (6)$$

によって結びつけられ、温位 θ は

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \quad (7)$$

で定義される。ただし、 R は (乾燥大気) の気体定数であり、 $\kappa = R/C_p$ は R と定圧比熱 C_p の比、 p_0 は温位を定義する際の基準圧力 (通常 1000 hPa) であり、 a を地球の半径、 g を重力加速度としている。また f はコリオリパラメータで、地球の自転角速度を Ω とし $f = 2\Omega \sin \varphi$ で表され、 F_λ, F_φ は摩擦力、 Q は大気に与えられる単位体積あたりの加熱率 (いわゆる非断熱加熱) である。

東西平均流と擾乱成分の方程式

地球大気の運動は、基本的には回転球面上に重力で拘束された流れで、東西方向には周期的であるが南北方向はそうではない。従って、その流れには東西、南北及び鉛直の各方向に対する非等方性が大きく、概して東西流の卓越する場となっている。このことに着目して、物理量 A を東西平均 $[A]$ 及びそれからの偏差 A^* に分けて考える (すなわち $A = [A] + A^*$)。このとき連続の式 (5) は

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial [u] + u^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial ([v] + v^*) \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial [\omega] + \omega^*}{\partial p} = 0$$

となるが、擾乱成分の東西平均が消える事 ($[A^*] = 0$) や東西平均量の λ 微分が消えること ($\partial [\cdot] / \partial \lambda = 0$) 及び、微分演算の線型性に注意してこの方程式の東西平均をとれば、平均流に対する連続の式

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial [v] \cos \varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial [\omega]}{\partial p} = 0$$

が得られる。これを更に元の式から引く事により、擾乱成分に対する連続の式

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial v^* \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \omega^*}{\partial p} = 0$$

を得る。

[注] これらの連続の式の左辺に現れる微分演算は球面座標系 (λ, φ, p) における発散 (div) を表わす式になっている事に注意しよう。特に平均流に対する連続の式の右辺は子午面 ($\varphi - p$ 平面) における発散演算を表している。それをここでは div_m で表す事にする。

こうして求めた、平均流及び擾乱成分に対する連続の式を用いて、 u, v 及び θ に対する発展方程式を変形する。例えば、東西風速 u に対する方程式

$$\frac{\partial[u+u^*]}{\partial t} + \frac{[u+u^*]}{a \cos \varphi} \frac{\partial[u+u^*]}{\partial \lambda} + \frac{[v+v^*]}{a} \frac{\partial[u+u^*]}{\partial \varphi} + ([\omega] + \omega^*) \frac{\partial[u+u^*]}{\partial p} - \frac{\tan \varphi}{a} ([u+u^*])([v+v^*]) - f([v+v^*]) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + [F_\lambda] + F_\lambda^*$$

を東西平均すると

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} + \left[\frac{u^*}{a \cos \varphi} \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} \right] + \frac{[v]}{a} \frac{\partial[u]}{\partial \varphi} + \left[\frac{v^*}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right] + [\omega] \frac{\partial[u]}{\partial p} + \left[\omega^* \frac{\partial u^*}{\partial p} \right] - \frac{\tan \varphi}{a} [u][v] - \frac{\tan \varphi}{a} [u^*v^*] - f[v] = [F_\lambda]$$

となるが、更に

$$\left[\frac{u^*}{a \cos \varphi} \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} \right] = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial(u^*)^2/2}{\partial \lambda} \right] = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial(u^*)^2/2}{\partial \lambda} d\lambda = 0$$

に注意し、また先に求めた平均流及び擾乱に対する連続の式を用いて幾つかの項を上手くまとめると平均流に対する方程式

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} + \frac{\partial([u][v] \cos^2 \varphi)}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial[\omega][u]}{\partial p} - f[v] = -\frac{\partial[u^*v^*] \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi} - \frac{\partial[u^*\omega^*]}{\partial p} + [F_\lambda]$$

が得られる。ただし、擾乱に関する項を右辺にまとめている。この方程式の左辺を戻すと

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} + \frac{[v]}{a} \frac{\partial[u]}{\partial \varphi} + [\omega] \frac{\partial[u]}{\partial p} - \frac{\tan \varphi}{a} [u][v] - f[v]$$

とも書ける事を注意しておく。この事に注意して、元の式から平均流に対する方程式を差し引き、更に擾乱に関する非線型項 (二次の項) を無視する事で、擾乱に対する線型化方程式

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{[u]}{a \cos \varphi} \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{[v]}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{v^*}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + [\omega] \frac{\partial u^*}{\partial p} + \omega^* \frac{\partial u^*}{\partial p} - \frac{\tan \varphi}{a} ([u]v^* + [v]u^*) - f v^* = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda} + F_\lambda^*$$

を得る。その際無視された項は

$$\frac{u^*}{a \cos \varphi} \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{v^*}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \omega^* \frac{\partial u^*}{\partial p} - \frac{\tan \varphi}{a} u^* v^*$$

であるが、これを東西平均したものが丁度上の平均流方程式の左辺に擾乱からの作用の項として現れることを注意しておく。(つまり、元の方程式を東西平均すればゼロとなるような線型部分とそうでない部分に便宜的に分け、前者を線型擾乱の方程式、後者を東西平均したものを平均流の方程式と呼んでいるわけである。)

同様に南北流 v に関する方程式から、平均流に対する方程式

$$\frac{\partial[v]}{\partial t} + \frac{\partial([v]^2 \cos \varphi)}{a \cos \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial[\omega][v]}{\partial p} + \frac{\tan \varphi}{a} [u]^2 + f[u] = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial[v^*v^*] \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} - \frac{\partial[v^*\omega^*]}{\partial p} - \frac{\tan \varphi}{a} [u^*u^*] + [F_\varphi]$$

と線型擾乱の方程式

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + \frac{[u]}{a \cos \varphi} \frac{\partial v^*}{\partial \lambda} + \frac{[v]}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} + \frac{v^*}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} + [\omega] \frac{\partial v^*}{\partial p} + \omega^* \frac{\partial v^*}{\partial p} + 2 \frac{\tan \varphi}{a} [u]u^* + f u^* = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \varphi} + F_\varphi^*$$

が得られ、温位 θ に関する方程式から平均流方程式

$$\frac{\partial[\theta]}{\partial t} + \frac{\partial([v][\theta] \cos \varphi)}{a \cos \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial[\omega][\theta]}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \frac{[Q]}{C_p} - \frac{\partial[v^*\theta^*] \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} - \frac{\partial[\omega^*\theta^*]}{\partial p}$$

及び線型擾乱の方程式

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{[u]}{a \cos \varphi} \frac{\partial \theta^*}{\partial \lambda} + \frac{[v]}{a} \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi} + \frac{v^*}{a} \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi} + [\omega] \frac{\partial \theta^*}{\partial p} + \omega^* \frac{\partial \theta^*}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \frac{Q^*}{C_p}$$

を得る。

EP フラックス

前節で得た東西方向と温位に関する平均流の方程式を再掲しておく。

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} + \frac{\partial([u][v]\cos^2\varphi)}{a\cos^2\varphi\partial\varphi} + \frac{\partial[\omega][u]}{\partial p} - f[v] = -\frac{\partial[u^*v^*]\cos^2\varphi}{a\cos^2\varphi\partial\varphi} - \frac{\partial[u^*\omega^*]}{\partial p} + [F_\lambda] \quad (8)$$

$$\frac{\partial[\theta]}{\partial t} + \frac{\partial([v][\theta]\cos\varphi)}{a\cos\varphi\partial\varphi} + \frac{\partial[\omega][\theta]}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \frac{[Q]}{C_p} - \frac{\partial[v^*\theta^*]\cos\varphi}{a\cos\varphi\partial\varphi} - \frac{\partial[\omega^*\theta^*]}{\partial p} \quad (9)$$

これらをスケールアナリシスにより次のように近似する。

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} - f[v] = -\frac{\partial[u^*v^*]\cos^2\varphi}{a\cos^2\varphi\partial\varphi} + [F_\lambda] \quad (10)$$

$$\frac{\partial[\theta]}{\partial t} + \frac{\partial[\omega][\theta]}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \frac{[Q]}{C_p} - \frac{\partial[v^*\theta^*]\cos\varphi}{a\cos\varphi\partial\varphi} \quad (11)$$

最後の式の左辺第二項は、更に等気圧面で全球平均した温位 θ_s を用いて

$$\frac{\partial[\omega][\theta]}{\partial p} \simeq [\omega] \frac{\partial[\theta]}{\partial p} + [\theta] \frac{\partial[\omega]}{\partial p} \simeq [\omega] \frac{\partial[\theta]}{\partial p} \simeq [\omega] \frac{\partial\theta_s}{\partial p}$$

と近似できる。また、東西平均した速度場 $[v], [\omega]$ に対し、連続の式

$$\frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial[v]\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial[\omega]}{\partial p} = 0 \quad (12)$$

が成立している事にも注意しておこう。

ここで、いささか天下りの的ではあるが

$$\tilde{v} = [v] - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{[v^*\theta^*]}{\partial\theta_s/\partial p} \right) \quad (13)$$

$$\tilde{\omega} = [\omega] + \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{[v^*\theta^*]\cos\varphi}{\partial\theta_s/\partial p} \right) \quad (14)$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \tilde{v} \cos\varphi &= \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} [v] \cos\varphi - \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{[v^*\theta^*]}{\partial\theta_s/\partial p} \right) \cos\varphi \\ \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\omega} &= \frac{\partial}{\partial p} [\omega] + \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{[v^*\theta^*]\cos\varphi}{\partial\theta_s/\partial p} \right) \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial\tilde{v}\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial p} = \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial[v]\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial[\omega]}{\partial p} = 0 \quad (15)$$

すなわち

$$\text{div}_m(\tilde{v}, \tilde{\omega}) = \text{div}_m([v], [\omega]) = 0$$

が成立することに注意しよう。また

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} = f\tilde{v} + \frac{1}{a\cos\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{[v^*\theta^*]f a \cos\varphi}{(\partial\theta_s/\partial p)} \right\} - \frac{1}{a\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \{ ([u^*v^*] a \cos\varphi) \cos\varphi \} \right] + [F_\lambda]$$

に注意し、二次元ベクトル場 \mathbf{F} を

$$\mathbf{F} = a\cos\varphi \left(-[u^*v^*], \quad f \frac{[v^*\theta^*]}{(\partial\theta_s/\partial p)} \right) \quad (16)$$

により定義すれば、東西平均した平均流に関する方程式 (10),(11) が

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} - f\tilde{v} = \frac{1}{a \cos \varphi} \operatorname{div}_m \mathbf{F} + [F_\lambda] \quad (17)$$

$$\frac{\partial[\theta]}{\partial t} + \tilde{\omega} \frac{\partial \theta_s}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q]}{C_p} \quad (18)$$

と書ける事になる。ここに定義した子午面内のベクトル場 \mathbf{F} を Eliassen-Palm フラックス (略して EP フラックス)、これを用いて表された東西平均流方程式 (17),(18) (及び連続の式 (15)) を変形オイラー方程式系 (Transformed Eulerian-Mean equations, 略して TEM 方程式系) と呼ぶ。また式 (13),(14) (及び (15)) で定義される修正された風速場から決まる子午面循環を 残差循環 (residual mean circulation) と呼ぶ。

[注] 平均流方程式 (8),(9) の近似として

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} - f[v] = -\frac{\partial[u^*v^*] \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi} - \frac{\partial[u^*\omega^*]}{\partial p} + [F_\lambda] \quad (19)$$

$$\frac{\partial[\theta]}{\partial t} + [\omega] \frac{\partial[\theta]}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q]}{C_p} - \frac{\partial[v^*\theta^*] \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} \quad (20)$$

をとった場合は、E-P フラックスとして

$$\mathbf{F} = a \cos \varphi \left(\frac{\partial[u]}{\partial p} \frac{[v^*\theta^*]}{(\partial[\theta]/\partial p)} - [u^*v^*], \left\{ f - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial[u] \cos \varphi}{\partial \varphi} \right\} \frac{[v^*\theta^*]}{(\partial[\theta]/\partial p)} - [u^*\omega^*] \right) \quad (21)$$

を採用する。このとき

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \operatorname{div}_m \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{f[v^*\theta^*]}{(\partial[\theta]/\partial p)} \right\} - \frac{\partial[u^*v^*] a \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi \partial \varphi} - \frac{\partial[u^*\omega^*]}{\partial p}$$

で、残差循環を

$$\tilde{v} = [v] - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{[v^*\theta^*]}{\partial \theta_s / \partial p} \right) \quad (22)$$

$$\tilde{\omega} = [\omega] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{[v^*\theta^*] \cos \varphi}{\partial[\theta]/\partial p} \right) \quad (23)$$

で定義すると、TEM 方程式

$$\frac{\partial[u]}{\partial t} - f\tilde{v} = \frac{1}{a \cos \varphi} \operatorname{div}_m \mathbf{F} + [F_\lambda] \quad (24)$$

$$\frac{\partial[\theta]}{\partial t} + \tilde{\omega} \frac{\partial[\theta]}{\partial p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q]}{C_p} \quad (25)$$

が得られる。

変形オイラー平均 (TEM) 方程式系

$$\frac{\tilde{D}[u]}{Dt} - \left(\frac{\tan \varphi}{a} [u] + f \right) \tilde{v} = \frac{1}{a \cos \varphi} \operatorname{div} \mathbf{F} + [F_\lambda]$$

$$\frac{\tilde{D}\tilde{v}}{Dt} + \left(\frac{\tan \varphi}{a} [u] + f \right) [u] = -\frac{1}{a} \frac{\partial[\Phi]}{\partial \varphi} + \operatorname{div} \mathbf{G} + [F_\varphi]$$

$$\frac{\tilde{D}[\theta]}{Dt} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa \frac{[Q]}{C_p} - \frac{\partial H}{\partial p}$$