

鉛直方向にChebyshev多項式展開を用いた静力学全球3次元スペクトルモデルの構築

気象大学校4年 黒木志洸 指導教官 村上茂教 准教授

1. 本研究について

全球大気モデルの水平・鉛直方向についてスペクトル法を導入した全球3次元スペクトルモデルの可能性は古くから議論されてきたテーマである。しかしながら、これまで議論されてきた全球3次元スペクトルモデルには、非線形項の評価や物理過程の導入に多大な計算コストが必要になることや、鉛直方向の境界条件の扱いなどの問題が存在し、未だに決定的な力学フレームの構築はなされていない。

本研究では、上記の問題を克服する全球3次元スペクトルモデルの可能性の1つとして、鉛直方向にChebyshev多項式展開を用いる方法を検討し、実際にモデルの定式化・構築を行った。

2. Chebyshev多項式

Chebyshev多項式は区間 $[-1,1]$ で定義される重み $1/\sqrt{1-x^2}$ の直交多項式系であり、その定義式は以下のように与えられる。

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \cos(n \cos^{-1} x)$$

鉛直基底にChebyshev多項式を用いる利点としては以下の点が挙げられる。

- 境界条件を柔軟に扱うことができる。
- 展開の収束が速く、小さな自由度で精度の良い計算を行うことができる。
- FFTを用いた高速変換が可能であり、変換に要する計算コストを減らすことができる。

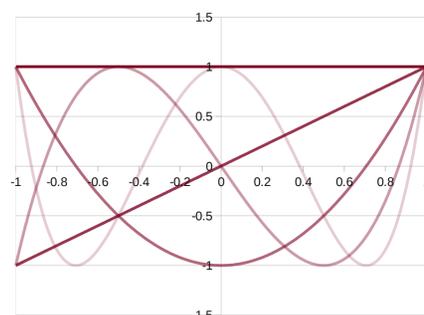


図1 Chebyshev多項式(n=0~4)

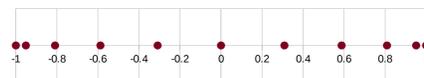


図2 Chebyshev-Gauss-Lobatto格子点(n=10)

4. モデル設定・ベンチマークテスト

2種類の静力学モデル(**Model1, Model2**)を構築し、力学コアベンチマークテスト(予報実験)の結果について比較を行った。

表1 モデル設定まとめ

	Model1	Model2
水平離散化手法	球面調和関数展開によるスペクトル法	
鉛直離散化手法	Chebyshev多項式展開によるスペクトル法	Lorentz型スタッガード格子を用いた差分法
解像度	T42 K20(L32)	T42 L20
時間積分法	Explicit leap-frog法	

Polvani et al.(2004)

偏西風ジェットおよび、それと温度風平衡する温度場を設定し、それに微小温度擾乱を与えることで傾圧不安定を発生させる実験。

Held and Suarez(1994)

強制項としてNewton冷却とRayleigh摩擦を与え、それにより生じる大気循環の気候学的状態を考察する実験。

5. 結果

- Polvani et al. test(下図3~6)およびHeld and Suarez test(下図7~8)の両実験において原論文と同様の結果が得られた。
- 今回行ったベンチマークテストではModel1, Model2の結果に大きな差異は見られなかった。

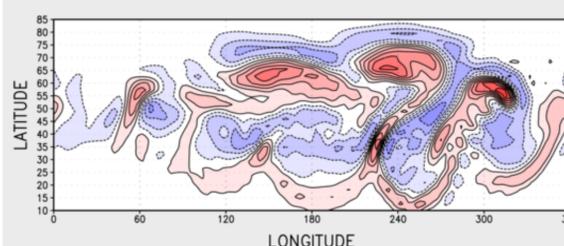


図3 Polvani et al. test, Model1, 渦度 $[10^{-5}/s]$, 12day, $\sigma=0.975$

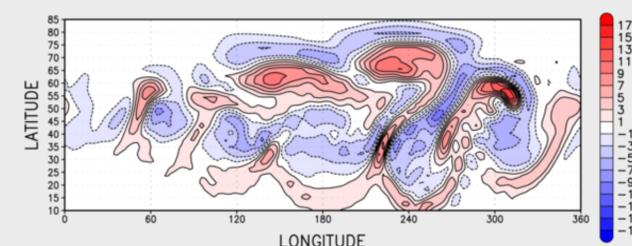


図4 Polvani et al. test, Model2, 渦度 $[10^{-5}/s]$, 12day, $\sigma=0.975$

3. モデルの構成

本研究では、 σ 座標プリミティブ方程式系(水蒸気なし)を支配方程式とした静力学モデルの構築を行った。

σ 座標プリミティブ方程式系(予報変数 ζ, D, T, π)

予報方程式

- ・渦度方程式
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{a \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial A}{\partial \lambda} + \cos \varphi \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right)$$
- ・発散方程式
$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial B}{\partial \lambda} - \cos \varphi \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) - \nabla^2 (\Phi + E)$$
- ・熱力学方程式
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} UT + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} VT \right) + TD - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{\alpha \omega}{C_p} + \frac{Q}{C_p}$$
- ・地上気圧傾向方程式
$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = - \int_0^1 D d\sigma - \int_0^1 \vec{v} \cdot \nabla \pi d\sigma$$

診断方程式

- ・静力学の式
$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \nabla^2 \Phi = -R \frac{\nabla^2 T}{\sigma}$$
- ・ $\dot{\sigma}$ 診断式
$$\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = -D - \vec{v} \cdot \nabla \pi - \frac{\partial \pi}{\partial t}$$

鉛直境界条件

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, 1$$

$$\Phi = \Phi_s \quad \text{at } \sigma = 1$$

$$U = u \cos \varphi, \quad V = v \cos \varphi, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad \alpha \omega = RT \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{\partial \pi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \pi \right)$$

$$A = (\zeta + f)U + \dot{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{RT}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} - F_\varphi \cos \varphi, \quad B = (\zeta + f)V - \dot{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} + \frac{RT}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} - F_\lambda \cos \varphi$$

工夫点①: 鉛直境界条件の扱い

鉛直方向の境界条件については 鉛直Lorentz型スタッガード格子(L-grid)モデルを参考に反映させた。その際、鉛直 σ 速度についてのDirichlet型境界条件についてはChebyshev-tau法と同様の手法により反映させた。

工夫点②: 大気上端の扱い

σ 座標プリミティブ方程式系中の大気上端($\sigma=0$)で不定となる項については、Arakawa and Konor(1996)および静力学系の性質より以下のように極限の推定を行った。

- ・静力学の式右辺
$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \nabla^2 \Phi = -R \frac{\nabla^2 T}{\sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$
- ・熱力学方程式 $\alpha\omega$ 項
$$\alpha \omega = RT \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{\partial \pi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \pi \right) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

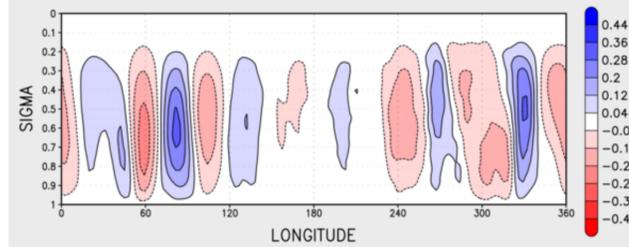


図5 Polvani et al. test, Model1, 鉛直気圧速度 [Pa/s], 12day, $\varphi=46^\circ\text{N}$

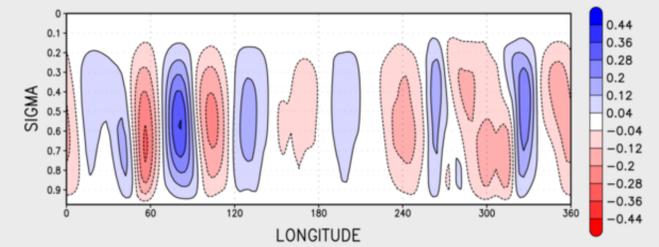


図6 Polvani et al. test, Model2, 鉛直気圧速度 [Pa/s], 12day, $\varphi=46^\circ\text{N}$

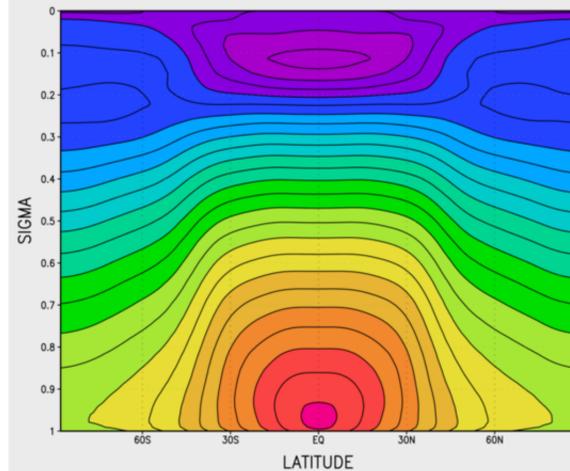


図7 Held and Suarez test, Model1, 気温の帯状時間平均[K]

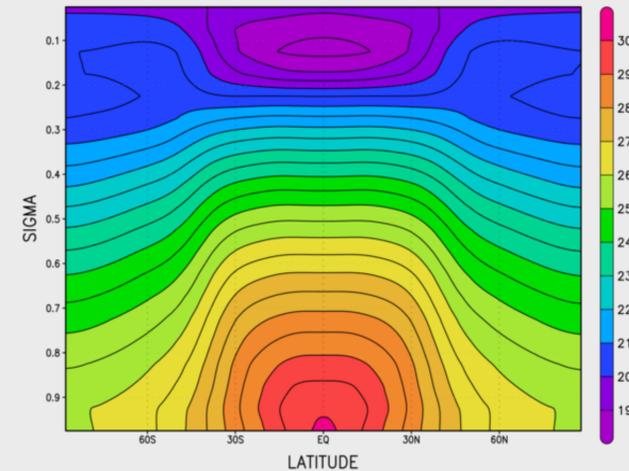


図8 Held and Suarez test, Model2, 気温の帯状時間平均[K]

6. 今後の課題

- ・時間差分スキームのsemi-implicit化によるモデルの高速化。
- ・地形を与えた際の重力波に関する実験や、より現実に近い地形・物理過程・初期値を与えた予報実験による、より詳しいモデル特性の調査。

参考文献

- ・石岡圭一, 2013: ispack-1.0.2, (<http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>)
- ・気象庁予報部, 1982: 電子計算室報告別冊第28号
- ・Arakawa, A., and C.S.Konor, 1996: Vertical Differencing of the Primitive Equations Based on the Charney-Phillips Grid in Hybrid σ -p Vertical Coordinates., *Mon., Wea. Rev.*, **124**, 511-528
- ・Held, I.H., and M.J.Suarez, 1994: A proposal for the Intercomparison of the Dynamical Cores of Atmospheric General Circulation Models., *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **75**, 1825-1830
- ・Polvani, L.M., and R.K.Scott, and S.J.Thomas, 2004: Numerically Converged Solutions of the Global Primitive Equations for the Dynamical Core of Atmospheric GCM., *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 2539-2552