

# Arnoldi法・Lanczos法を用いた高解像度大気モデルの 固有値・特異値解析に関する研究

細井大豪 指導教官：村上茂教講師

## 1.はじめに (研究の背景)

テレコネクションパターン...大気循環場の大規模な偏差パターン  
しばしば異常気象の原因になる  
パターンの同定が異常気象発生メカニズム解明の手掛かりになる  
同定手法の1つ：線形化大気モデルに現れる力学演算子行列の  
固有値・特異値解析  
先行研究より**高解像度**のモデルを用いて解析を行いたい  
⇔高解像度モデルの場合、行列が大規模になり**計算資源が足りない**  
大規模行列に対する固有値の近似計算法の**Arnoldi法・Lanczos法**を用いる

線形化大気モデル（傾圧モデル:LBM、順圧渦度モデル:LVM）に対して  
Arnoldi法・Lanczos法を用いた固有値・特異値解析の手法を開発し、  
テレコネクションパターンの同定を試みる。

## 3.直接計算と近似計算の比較

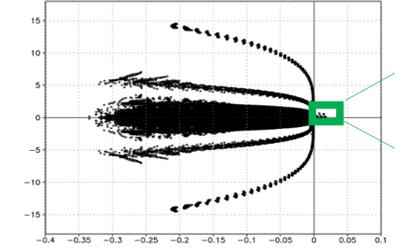
手法	次元	メモリ(GB)	計算時間(s)
Direct	57288	52.6	121696
Arnoldi	10000	5.4	3848

使用データ(基本場)  
JRA-55の7月の気候値・地形

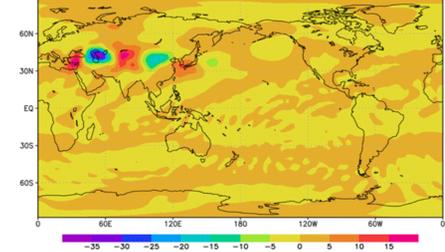
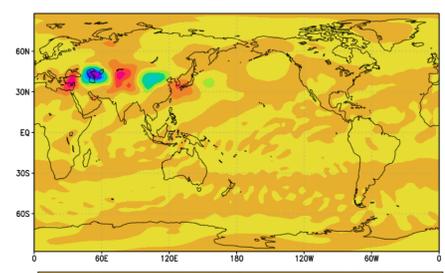
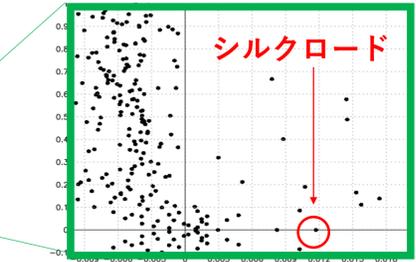
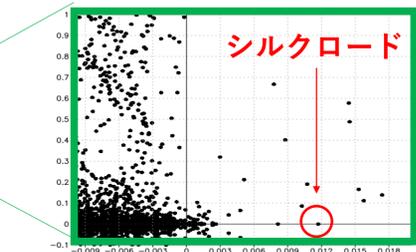
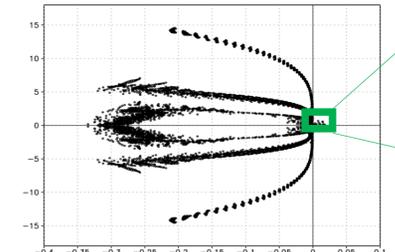
### Arnoldi法

計算されたシルクロードパターンの  
固有値と250hPa渦度分布

LBM T42L10(Direct)



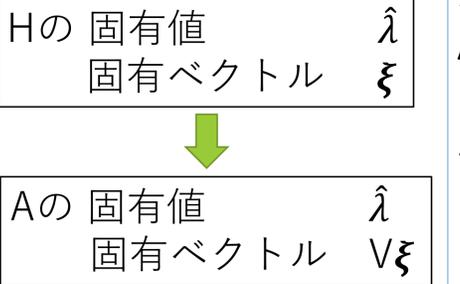
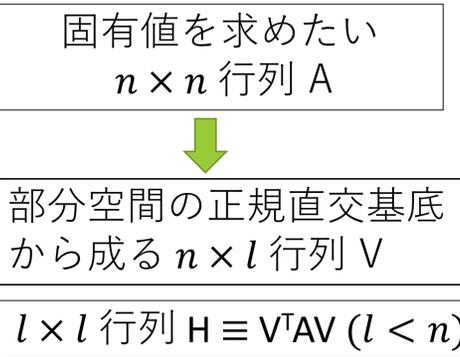
LBM T42L10(Arnoldi)



直接的な固有値分解の場合よりも少ないメモリ  
・計算時間で必要なモードを計算できた

## 2.大規模行列の固有値計算法

大規模な固有値問題  
⇒部分空間上に射影する



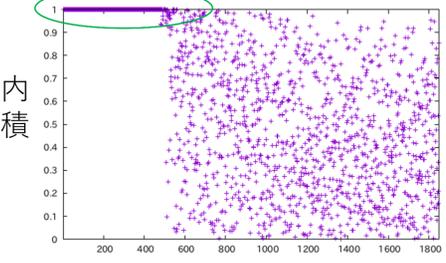
Arnoldi法→非対称行列 Lanczos法→対称行列  
クリロフ部分空間{ $u, Au, A^2u, \dots, A^{l-1}u$ }を採用  
Vの計算にはグラムシュミットの直交化を利用  
<特徴>  
・行列の各成分を必要としない  
・一部の固有値を計算  
・少ないメモリ・時間で計算できる  
特異値解析 →  $A^T A$  に対しLanczos法  
↳ 随伴モデルを利用

近似精度がよい領域  
Arnoldi法...もとの固有値分布のうち**周辺部**  
Lanczos法(特異値解析)...**大きな**特異値  
↔気候学的には**小さな**特異値が重要  
→  $A^T A x$  を  $(A^T A)^{-1} x$  に置き換える(Invert-Lanczos法)  
↑共役勾配法を利用

LVM T42 Lanczos

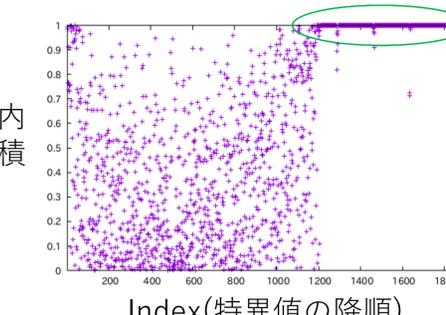
$n = 1848, l = 1000$

### Lanczos法



特異値分解の直接計算から得られた特異ベクトルに  
対しそれぞれの近似計算法で得られた特異ベクトル  
との内積の絶対値を総当たりで計算し、最大値を  
プロットした図 (1に近いほど近似がよい)

LVM T42 Invert-Lanczos

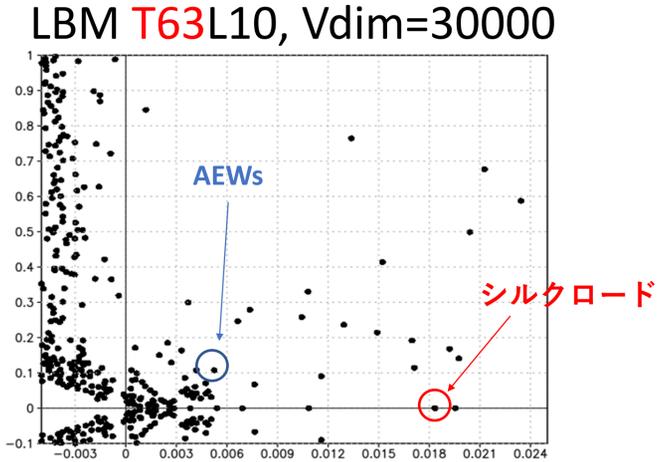


Lanczos法では小さな特異値の近似精度が悪い  
一方、Invert-Lanczos法では近似精度が向上  
しかし、  
LBMの場合は共役勾配法の計算が収束せず、  
**気候学的に重要なパターンの計算が行えなかった**  
...共役勾配法の収束速度は行列の条件数に依存  
T42 LVM :  $8.24 \times 10^{13}$ , T42L10 LBM :  $1.90 \times 10^{20}$   
→LBMでは条件数が大きくなり収束しなかった

# 4.高解像度大気モデルに対する固有値解析

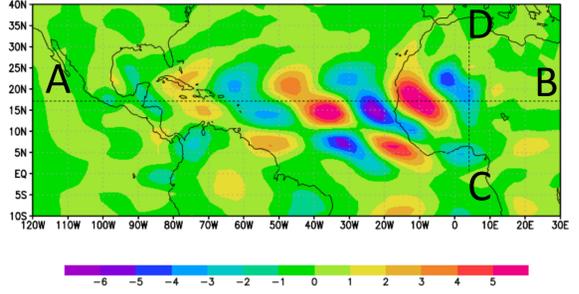
水平解像度をT63に上げたモデルに対してArnoldi法を適用し固有値解析を行った結果

## 固有値分布 (原点付近)

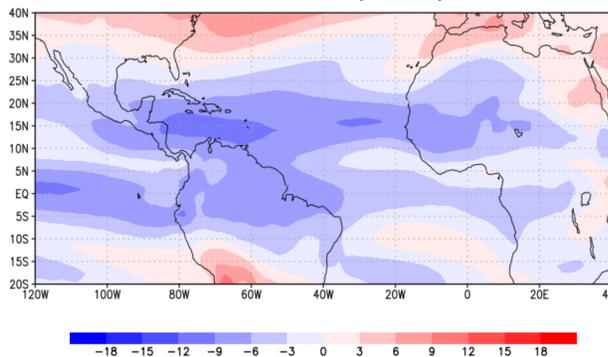


## 新たに得られたアフリカ偏東風波動(AEWs)に似たモード

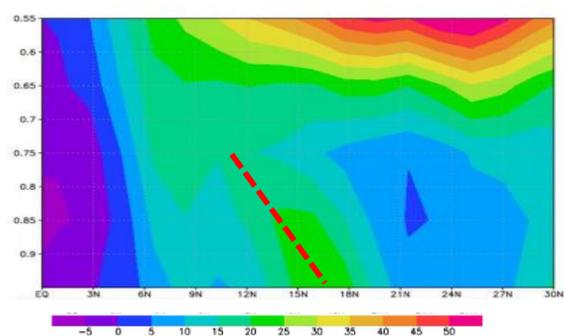
固有モードの750 hPa高度の渦度分布( $10^{-4}$  /s)



基本場の750 hPa高度の東西風速(m/s)



基本場の渦位( $10^{-6}$  (K·m<sup>2</sup>)/(kg·s)) C-Dに沿った緯度-高度断面

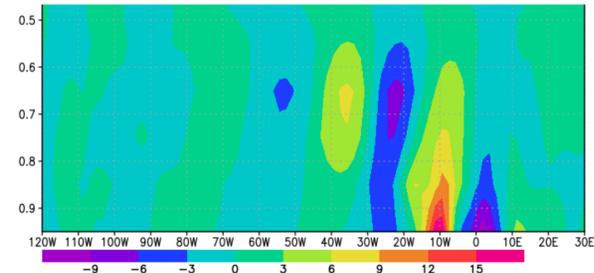


水平解像度を上げたことによる変化

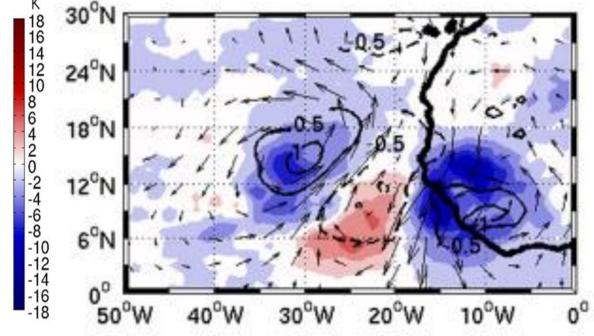
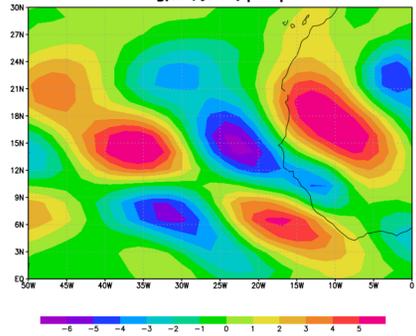
- 傾圧不安定波などの最大波数が増加
- 新たなパターンが抽出された(右図)

(青丸はAEWs(右図)に対応する固有値、赤丸はシルクロードパターン)

ただしA-Bに沿った経度-高度断面



固有モードの渦度分布の拡大図



アフリカ偏東風波動の例。700hPaにおける輝度温度偏差(カラー,K)、水平風偏差(矢印,m/s)、渦度偏差(コンター, $10^{-5}$ /s) Dieng et al.(2017)より引用。

アフリカ偏東風波動(AEWs)の特徴(Dieng et al., 2017)

- アフリカのサハラ地域～赤道大西洋の対流圏中層で発生
- アフリカ偏東風ジェットに沿って発達
- 平均波長2500km、周期3~5日

抽出されたパターンについて

波長…図から約3200km 周期…固有値の虚部から約4.8日

→水平構造がDieng et al.(2017)(左下図)とやや異なるものの、発生領域や波長、周期は整合している。

AEWsは内部ジェットの不安定性から発生していると考えられている。基本場の渦位の緯度-高度断面(右上図)から、赤破線の位置で渦位が極大となっており、不安定性の必要条件(基本場の渦位の南北勾配が領域内で符号を変えている)が満たされていることが分かる。

# 5.まとめと課題

- <まとめ>
- Arnoldi法を用いることにより、直接的な固有値分解を行なう場合よりも少ないメモリ・計算時間で気候学的に重要なモードを計算できた。また、高解像度モデルを用いることにより、7月の気候平均場の下でシルクロードパターンに加えてAEWsモードが抽出された。
  - Lanczos法を用いたLBMの特異値解析では、共役勾配法の計算が収束せず気候学的に重要な卓越モードを計算できなかった。
- <課題>
- 鉛直構造関数を用いたより表現力の高いモデルへのArnoldi法の適用。特異値解析に関して、Lanczos法の改善あるいは他の手法の検討。